7 章　図形と方程式

1 節　座標平面上の点と直線

314　⑴　$(2,\ 5)$

　⑵　内分　$\left(\frac{13}{5},\ 0\right)$，外分　$(-7,\ -24)$

　⑶　内分　$(1,\ 4)$，外分　$(9,\ 8)$

　　中点　$\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$

315　$(-2,\ 1)$

316　⑴　$\sqrt{10}$　⑵　$5\sqrt{2}$　⑶　$2\sqrt{10}$　⑷　13

317　⑴　$\angle B = 90^\circ$ の直角三角形

　　重心の座標$\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

　⑵　$DE = EC$ の二等辺三角形

　　重心の座標$(-2,\ -2)$

318　$(-5,\ -3)$

319　⑴　$P(5,\ 0)$　⑵　$Q(0,\ -2)$　⑶　$P\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$，$Q(0,\ 5)$

320　⑴　$y = 2x + 3$　⑵　$y = -x + 3$　⑶　$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$　⑷　$y = -1$　⑸　$x = -2$

321　⑴　$y = -2x$　⑵　$y = -x - 1$　⑶　$y = -\frac{4}{3}x + 4$　⑷　$x = -2$

322　⑴　$y = -3x + 5$，$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

　⑵　$y = \frac{3}{2}x - 7$，$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

　⑶　$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$，$y = 2x + 5$

323　⑴　$y = \frac{1}{2}x + 5$

　⑵　$y = -\frac{1}{3}x + 3$

324　$A(2,\ 3)$，$B(4,\ -3)$，$C(-4,\ 7)$

325　⑴　$\left(\frac{7}{2},\ \frac{3}{2}\right)$　⑵　$(9,\ 5)$

326　$A(5,\ 2)$，$B(-4,\ 2)$，$C(5,\ 8)$

327　$(5,\ 0)$　または　$\left(\frac{23}{2},\ 0\right)$

328　⑴　$(-4,\ 3)$　⑵　$\left(\frac{16}{5},\ -\frac{27}{5}\right)$

329　⑴　$a = 4,\ -2$　⑵　$a = -\frac{1}{3}$

330

$(x - y - 5) + (2x + y - 4)k = 0$

k についての恒等式と考えて

$$x - y - 5 = 0 \quad \cdots①$$
$$2x + y - 4 = 0 \quad \cdots②$$

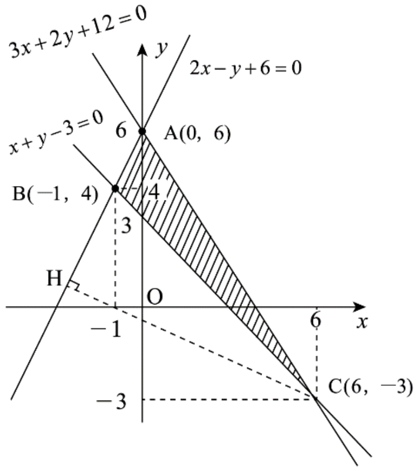
①，②を解いて　$x = 3$，$y = -2$

よって，　$(3,\ -2)$

331　⑴　2　　⑵　$\frac{\sqrt{10}}{2}$

332　⑴　$x-2y+1=0$　　⑵　5

333



図のように△ABCとすると

$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{CH}=\frac{\left|2\cdot 6-(-3)+6\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{21}{\sqrt{5}}$

∴　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{21}{\sqrt{5}}=\frac{21}{2}$

2 節　2 次曲線

334　⑴　$x^2+y^2=9$

⑵　$(x-2)^2+(y+1)^2=82$

⑶　$(x+2)^2+(y-4)^2=4$

⑷　$(x+2)^2+(y-1)^2=2$

⑸　$(x+1)^2+y^2=29$

335　⑴　中心 $(-1,\ 0)$，半径1

⑵　中心 $(-4,\ 3)$，半径4

⑶　中心 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$，半径 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

⑷　中心 $(3,\ -1)$，半径 $\frac{5}{2}$

336　⑴　$x^2+y^2-4x+8y-5=0$

⑵　$x^2+y^2+2x-4y-20=0$

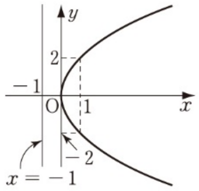
337　⑴　円 $(x-10)^2+y^2=36$

⑵　円 $\left(x+\frac{13}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$

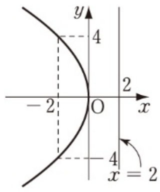
338　⑴　$2x+y=5$　　⑵　$y=2$　　⑶　$-2\sqrt{2}x+y=9$　　⑷　$x=-\sqrt{7}$

339　⑴　$y^2=8x$　　⑵　$x^2=-4y$　　⑶　$y^2=-4x$　　⑷　$x^2=2y$

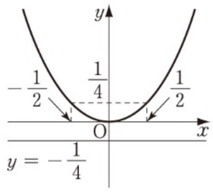
340　⑴　焦点$(1,\ 0)$，準線　$x=-1$



⑵　焦点$(-2,\ 0)$，準線　$x=2$



⑶　焦点$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，準線　$y=-\frac{1}{4}$

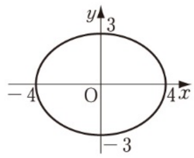


341　⑴　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　⑵　$x^2+\frac{y^2}{16}=1$　　⑶　$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1$

342　⑴　焦点$(\pm\sqrt{7},\ 0)$

長軸の長さ8

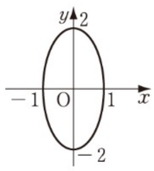
短軸の長さ6



⑵　焦点$(0,\ \pm\sqrt{3})$

長軸の長さ4

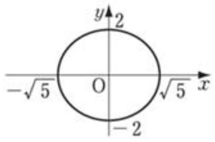
短軸の長さ2



⑶　焦点$(\pm 1,\ 0)$

長軸の長さ$2\sqrt{5}$

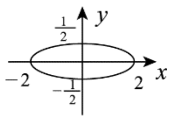
短軸の長さ4



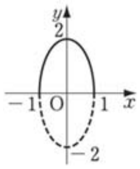
(4)　焦点$\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{2},\ 0\right)$

長軸の長さ4

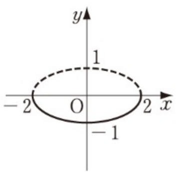
短軸の長さ1



343　(1)



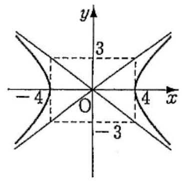
(2)



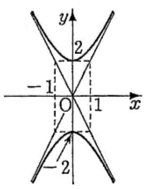
344　(1)　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　(2)　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1$　　(3)　$x^2-\frac{y^2}{g}=1$

345

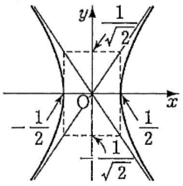
(1)　焦点$(\pm 5,\ 0)$，漸近線 $y=\pm\frac{3}{4}x$



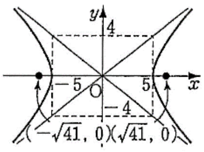
(2)　焦点$(0,\ \pm\sqrt{5})$，漸近線 $y=\pm 2x$



⑶　焦点$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，漸近線 $y=\pm\sqrt{2}x$

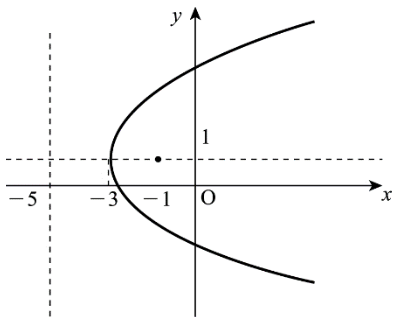


⑷　焦点$\left(\pm\sqrt{41},\ 0\right)$，漸近線 $y=\pm\frac{4}{5}x$

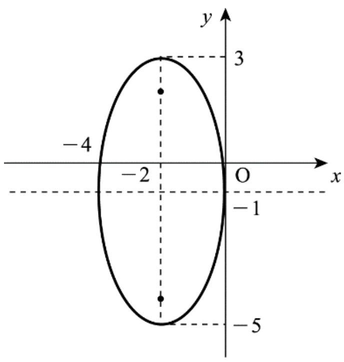


346

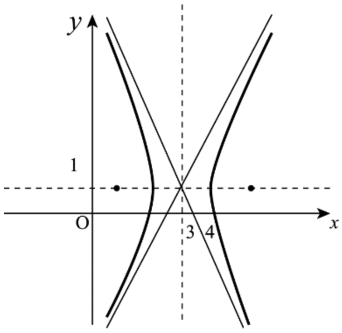
⑴　焦点　$(-1,\ 1)$



⑵　焦点　$(-2,\ 2\sqrt{3}-1)$，$(-2,\ -2\sqrt{3}-1)$



⑶　焦点　$(3+\sqrt{5})$，$(3-\sqrt{5}, 1)$



347　⑴　$3x-4y=25$，$4x+3y=25$

⑵　$y=-2$，$x=2$

348　⑴　$y=2x+\sqrt{5}$，$y=2x-\sqrt{5}$

⑵　$y=\pm\sqrt{3}x+2$

349　⑴　接線　$y=-7x$，このとき接点は　$\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$

接線　$y=x$，このとき接点は$(2, 2)$

⑵　原点と接点の距離は $2\sqrt{2}$

350　⑴　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

または　$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

⑵　$(x-4)^2+y^2=26$

351　$(x-1)^2+(y+1)^2=25$

352　⑴　$(2, 0)$，$\left(\frac{14}{25}, -\frac{72}{25}\right)$　　⑵　$\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$　　⑶　$(4, 4)$，$(1, -2)$

353　⑴　$k=\pm2\sqrt{17}$

⑵　$-2\sqrt{17}<k<2\sqrt{17}$

354　⑴　$k=\pm\sqrt{3}$

⑵　$k<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}>k$

355　双曲線上の点を$\mathrm{P}(x_1, y_1)$とすると，

（問題 331 にある「点と直線の距離の公式」を使う）

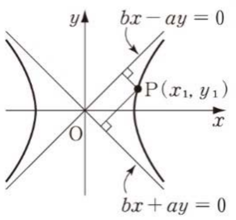
$\mathrm{PQ}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\mathrm{PR}=\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ここで，点 P は双曲線上の点だから

$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$

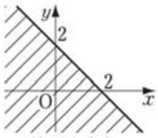
したがって　$b^2{x_1}^2-a^2{y_1}^2=a^2b^2$

よって　$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　（一定）　（証明終）

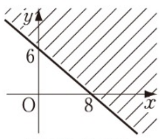


3 節　不等式と領域

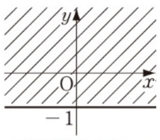
356　(1)


境界を含む

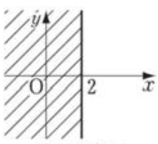
(2)


境界は含まない

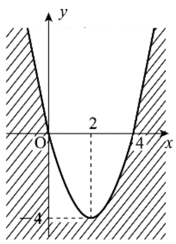
(3)


境界は含まない

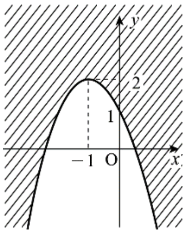
(4)


境界を含む

(5)

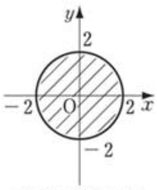

境界は含まない

(6)



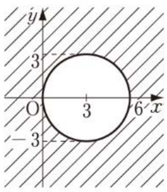
境界を含む

357 (1)



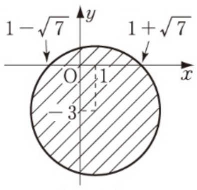
境界は含まない

(2)



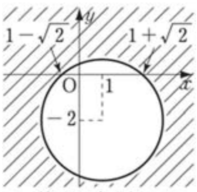
境界を含む

(3)



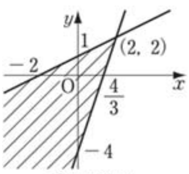
境界を含む

(4)



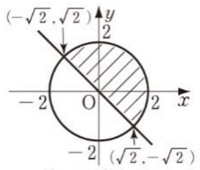
境界は含まない

358 (1)



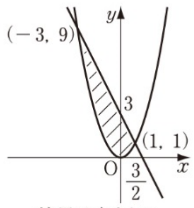
境界を含む

(2)



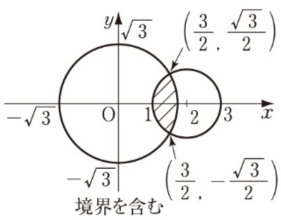
境界は含まない

(3)



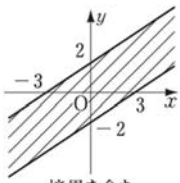
境界は含まない

(4)



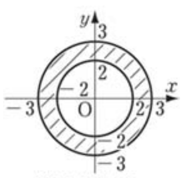
境界を含む

359 (1)



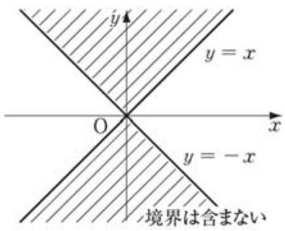
境界を含む

(2)



境界は含まない

(3)



境界は含まない

360 (1) $x = 2$, $y = 2$ のとき最大値 4

$x = 0$, $y = 0$ のとき最小値 0

⑵　$x=y=2$ で最大値 4

$x=y=1$ で最小値 2

⑶　$x=y=0$ で最大値 0

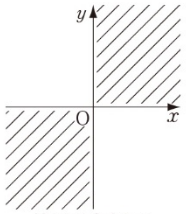
$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$y=1-\frac{\sqrt{5}}{5}$ で最小値 $1-\sqrt{5}$

361　$x=y=1$ で最小値 2

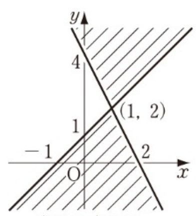
362　$x=4$，$y=-3$ のとき最大値 25

$x=y=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$

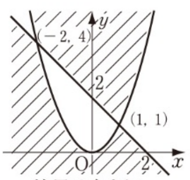
363　⑴



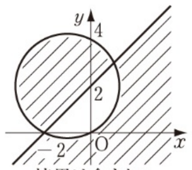
⑵



⑶



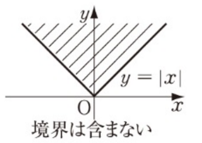
⑷



364

$$\begin{cases} y>-2x+7 \\ y>3x-8 \\ y<\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \end{cases}$$

365 ⑴

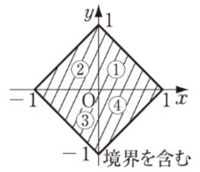


⑵ $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき $x+y \leqq 1$ …①

$x<0$，$y \geqq 0$ のとき $-x+y \leqq 1$ …②

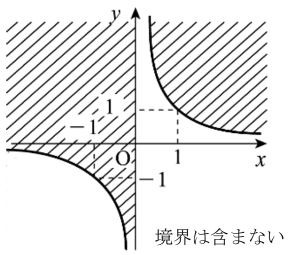
$x<0$，$y<0$ のとき $-x-y \leqq 1$ …③

$x \geqq 0$，$y<0$ のとき $x-y \leqq 1$ …④



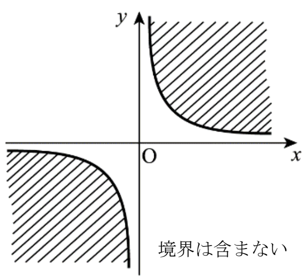
366

⑴



⑵ $x>0$ のとき $y>\frac{1}{x}$

$x<0$ のとき $y<\frac{1}{x}$



7 章の問題

1 $k<-1$，$4<k$

2 ⑴ $y^2=x$

⑵ $x^2=-4y$

3 ⑴ 楕円の中心は $(2,\ 2)$ にあり頂点が直線 $x=2$ 上にあるから

$\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$ とおける。

短軸の長さが 2 より$a=1$，$\sqrt{b^2-a^2}=5-2=3$

∴　$a^2=1$，$b^2=10$　よって，$(x-2)^2+\frac{(y-2)^2}{10}=1$

⑵　双曲線の中心は，漸近線の交点で $(1,\ 2)$
中心が原点にくるように平行移動すると
漸近線は $y=\pm x$，焦点の1つは$(2,\ 0)$ となる。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　とおくと　$\frac{b}{a}=1$，$\sqrt{a^2+b^2}=2$

これより $a^2=2$，$b^2=2$
∴　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　中心が$(1,\ 2)$になるように平行移動して
$\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$

⑶　頂点$(0,\ -1)$が原点にくるように平行移動すると，
焦点は$(2,\ 0)$に移るから　$y^2=4\cdot 2x$ と表せる。
頂点が$(0,\ -1)$になるように平行移動して
$(y+1)^2=8x$

4

⑴　$y=m(x-2)-1$ とおいて放物線の式に代入する。
$x^2=-4(mx-2m-1)$ より
$x^2+4mx-8m-4=0$
接するから
$D/4=(2m)^2+8m+4=0$
$(m+1)^2=0$　∴　$m=-1$
よって，$y=-x+1$

⑵　$y=mx+3$ とおいて楕円の式に代入する。
$4x^2+9(mx+3)^2=36$
$(9m^2+4)x^2+54mx+45=0$
接するから
$D/4=(27m)^2-(9m^2+4)\cdot 45=0$

$(81-45)m^2=20$　∴　$m=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

よって，$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x+3$

⑶　$y = x + n$　とおいて双曲線の式に代入する。

$4x^2 - (x+n)^2 = -4$

$3x^2 - 2nx - n^2 + 4 = 0$

接するから

$D/4 = n^2 - 3(-n^2 + 4) = 0$

$4n^2 = 12 \qquad \therefore\ n = \pm\sqrt{3}$

よって，$y = x \pm \sqrt{3}$

5　$y^2 = 4px$　…①

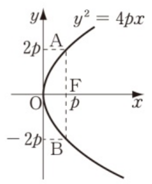
焦点$\mathrm{F}(p,\ 0)$を通りx軸に垂直な直線は

$x = p$　…②

①，②の交点のy座標は　$y^2 = 4p^2$　より

$y = \pm 2p$　$p > 0$　より　$\mathrm{AF} = 2p$

よって　$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AF} = 4p = 4\mathrm{OF}$　（証明終）



6　点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$-a < x_1 < a$　とすると

$\dfrac{\mathrm{PH}^2}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}} = \dfrac{{y_1}^2}{(x_1+a)(a-x_1)}$　…①

ここで　$\dfrac{{x_1}^2}{a^2} + \dfrac{{y_1}^2}{b^2} = 1$　だから

${y_1}^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - {x_1}^2)$　を①に代入して，

$\dfrac{\mathrm{PH}^2}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}} = \dfrac{\frac{b^2}{a^2}(a^2-{x_1}^2)}{a^2-{x_1}^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$　で一定。

（証明終）

7　$P\left(x_1,\ y_1\right)$ とすると，P を通り y 軸に平行な直線は

$x = x_1$　　　　　　　　…①

漸近線は　$y = \pm\frac{b}{a}x$　　　…②

①，②を連立して解くと

$A\left(x_1,\ \frac{b}{a}x_1\right)$，$B\left(x_1,\ -\frac{b}{a}x_1\right)$　より

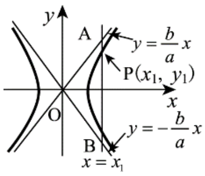
$PA \cdot PB = \left|\frac{b}{a}x_1 - y_1\right| \cdot \left|y_1 - \left(-\frac{b}{a}x_1\right)\right|$

$= \left|\frac{b^2}{a^2}{x_1}^2 - {y_1}^2\right| = b^2\left|\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{{y_1}^2}{b^2}\right|$

ここで，P は双曲線上の点より

$\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

よって　$PA \cdot PB = b^2$　（一定）



8

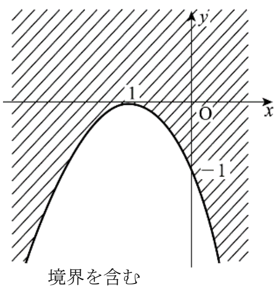
⑴　点 $\left(1,\ 2\right)$ を与式に代入すると

$2 = 2k + k^2 + 2k$

$k^2 + 4k - 2 = 0$

$k = -2 \pm \sqrt{6}$

よって，k の値が存在するから点 $A\left(1,\ 2\right)$ を通過することができる。



⑵　与式を　$k^2 + 2(x+1)k - y = 0$　　…①として

この式を満たす　の実数条件をとる。

すなわち①の判別式を D とすると

$D/_4 = (x+1)^2 + y \geqq 0$

∴　$y_3 - (x+1)^2$