8 章　集合・場合の数・命題

1 節　集合と要素の個数

367　⑴　$7 \in A$，$7 \notin B$

⑵　$12 \notin A$，$12 \notin B$

⑶　$14 \notin A$，$14 \in B$

⑷　$130 \in A$，$130 \in B$

368　⑴　$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$

⑵　$B = \{0,\ 1,\ 4\}$

369　⑴　$\overline{A} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

⑵　$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

⑶　$A \cap B = \{2\}$

⑷　$A \cap \overline{B} = \{4,\ 6,\ 8\}$

⑸　$\overline{A \cap B} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

⑹　$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

370　⑴　$A \supset B$　⑵　$A \subset B$　⑶　$A \subset B$

371　⑴　$\{x | x \leqq -5$ または $-2 \leqq x\}$

⑵　$\{x | 1 \leqq x \leqq 2\}$

⑶　$\{x | x < -2$ または $1 \leqq x\}$

⑷　$\{x | -5 < x < -2\}$

372　⑴　$a < -1$　⑵　$3 \leqq a < 5$　⑶　$-1 \leqq a \leqq 3$

373　$a = -2$

374　⑴　8　⑵　9　⑶　11　⑷　3

375　⑴　35人　⑵　20人　⑶　11人　⑷　5人

376　⑴　16　⑵　20　⑶　20　⑷　40

377　$n(V) = 99 - 9 = 90$

$10 \leqq 3n \leqq 99$　より　$3.3\cdots \leqq n \leqq 33$　$\therefore\ 4 \leqq n \leqq 33$

$n(A) = 33 - 3 = 30$

$10 \leqq 5n \leqq 99$　より　$2 \leqq n \leqq 19.8\cdots$　$\therefore\ 2 \leqq n \leqq 19$

$n(B) = 19 - 1 = 18$

⑴　$A \cap B$は15の倍数だから

$10 \leqq 15n \leqq 99$　より　$0.6\cdots \leqq n \leqq 6.68\cdots$　$\therefore\ 1 \leqq n \leqq 6$

$n(A \cap B) = 6$

⑵　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$

⑶　$n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 18 - 6 = 12$

⑷　$n(\overline{A} \cup B) = n(\overline{A \cap B}) - n(V) - n(A \cap B) = 90 - 6 = 84$

378　全体集合を V，7で割り切れる数の集合をA

11で割り切れる数の集合をBとする。

$1000 \div 7 = 142.8\cdots$　　$\therefore$　$n(A) = 142$

$1000 \div 11 = 90.9\cdots$　　$\therefore$　$n(B) = 90$

$A \cap B$ は77の倍数だから

$1000 \div 77 = 12.9\cdots$　　$\therefore$　$n(A \cap B) = 12$

⑴　$n(\overline{A}) = n(V) - n(A) = 1000 - 142 = 858$

⑵　$n(B) - n(A \cap B) = 90 - 12 = 78$

379　⑴　$n(\overline{A} \cup \overline{B}) = 80$ より

$$n(\overline{A} \cup \overline{B}) = n(V) - n\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right)$$
$$= n(V) - n\left(\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}\right)$$
$$= n(V) - n(A \cap B)$$

$\therefore$　$80 = 100 - n(A \cap B)$ より $n(A \cap B) = 20$

⑵　$$n(\overline{A} \cup B) = n(V) - n\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right)$$
$$= n(V) - n(A \cap \overline{B})$$

$\therefore$　$60 = 100 - n(A \cap \overline{B})$ より $n(A \cap \overline{B}) = 40$

⑶　$$n(A \cup \overline{B}) = n(V) - n\left(\overline{A \cup \overline{B}}\right)$$
$$= n(V) - n(\overline{A} \cap B)$$

$\therefore$　$70 = 100 - n(\overline{A} \cap B)$ より $n(\overline{A} \cap B) = 30$

$n(B) = n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap B) = 30 + 20 = 50$

380

⑴　$a - 1 = 1$ または$1 - 2a = 1$

$a = 2$ のとき $\mathrm{A} = \{2,\ 1,\ 7\}$，$\mathrm{B} = \{1,\ 2,\ -3\}$

$A \cap B = \{1,\ \ 2\}$　　$\therefore$　$b = 2$ で成り立つ。

$a = 0$ のとき　$A = \{0,\ 1,\ 7\}$，$B = \{-1,\ 2,\ 1\}$

$A \cap B = \{1\}$ だから不適

よって，$a = 2$　$b = 2$　　また，$A \cup B = \{-3,\ 1,\ 2,\ 7\}$

381　⑴　$500 \div 3 = 166$ あまり2　$\therefore$　$n(A) = 166$

⑵　$500 \div 5 = 100$　　　　　$\therefore$　$n(B) = 100$

⑶　$500 \div 7 = 71$ あまり3　$\therefore$　$n(C) = 71$

⑷　$A \cap B$は15の倍数だから

$500 \div 15 = 33$ あまり5　$\therefore$　$n(A \cap B) = 33$

⑸　$B \cap C$は35の倍数だから

$500 \div 35 = 14$ あまり 10　$\therefore$　$n(B \cap C) = 14$

⑹　$C \cap A$は21の倍数だから

$500 \div 21 = 23$ あまり17　$\therefore$　$n(C \cap A) = 23$

⑺　$A\cap B\cap C$は105の倍数だから

　$500\div 105=4$ あまり80　∴　$n(A\cap B\cap C)=4$

⑻　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=166+100+71-33-14-23+4=271$

382　それぞれの利用人数を次のようにおく。

a：電車だけ，b：バスだけ，c：自転車だけ

p：電車とバスだけ，q：電車と自転車だけ

r：バスと自転車だけ，s：3つとも利用している

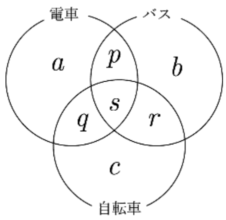
$s=0$　……①

$p+q+r=132$　……②

$r+s=37$　……③

$a+p+q+s=196$　……④

$c=4b$　……⑤



$a+b+c+p+q+r+s$

$=320-32=288$　……⑥

⑴　①，③より　$r=37$

　③に代入して　$p+q=95$

　これと $s=0$ を④に代入して　$a=196-95=101$人

⑵　$a=101$ と①，②を⑥に代入して

　$101+b+c+132=288$　∴　$b+c=55$

　⑤を代入して，$b+4b=55$　∴　$b=11$人

⑶　$c=4b=4\cdot 11=44$人

⑷　自転車を利用してない人は,

　$32+a+b+p$ で $a=101$，$b=11$ だから

　$32+101+11+p=144+p$

　$p+q=95$ だから　$0\leqq p\leqq 95$

　∴　$144\leqq 144+p\leqq 239$

　よって，最大で239人

2 節　場合の数・順列・組合せ⑴

383　15組

384　⑴　11通り　⑵　6通り　⑶　18通り

385　⑴　80通り　⑵　8個　⑶　12通り

386　10通り

387　⑴　12個　⑵　30個

388　⑴　72　⑵　336　⑶　840　⑷　720

389　⑴　90通り　⑵　1680通り　⑶　40320通り　⑷　60個，奇数は36個

390　⑴　$6 \times {}_6\mathrm{P}_3 = 720$（個）　⑵　$5 \times {}_5\mathrm{P}_2 \times 3 = 300$（個）

⑶　${}_6\mathrm{P}_3 + 5 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 220$（個）

391　${}_5\mathrm{P}_5 \times {}_3\mathrm{P}_3 = 720$（通り）

392　⑴　${}_4\mathrm{P}_4 \times {}_4\mathrm{P}_4 = 576$（通り）

⑵　両端に女子がくる場合は　${}_4\mathrm{P}_2 \times {}_5\mathrm{P}_5$（通り）

7人の並び方は　${}_7\mathrm{P}_7$（通り）

∴　${}_7\mathrm{P}_7 - {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_5\mathrm{P}_5 = 5!\,(7 \times 6 - 4 \times 3) = 3600$（通り）

⑶　女子の並び方は ${}_4\mathrm{P}_4$（通り）

∧ 女 ∧ 女 ∧ 女 ∧ 女 ∧

男子の並び方は　${}_5\mathrm{P}_3$（通り）

∴　${}_4\mathrm{P}_4 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 1440$（通り）

393　⑴　a ○ ○ ○ ○　$\cdots {}_4\mathrm{P}_4 = 24$　（通り）

b a ○ ○ ○　$\cdots {}_3\mathrm{P}_3 = 6$　（通り）

b c ○ ○ ○　$\cdots {}_3\mathrm{P}_3 = 6$　（通り）

b d a c e

b d a e c

b d c a e

b d c e a

よって，$24 + 6 + 6 + 4 = 40$（番目）

⑵
$$\left.\begin{array}{l} a\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \ \cdots {}_4\mathrm{P}_4 = 24 \\ b\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \ \cdots {}_4\mathrm{P}_4 = 24 \end{array}\right\} 48\text{（通り）}$$

c a b d e

∴　c a b e d　⋯50番目

394　⑴　10　⑵　56　⑶　1　⑷　45

395　⑴　${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$（通り）　⑵　${}_6\mathrm{C}_3 = 20$（通り）　⑶　${}_7\mathrm{C}_5 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 21$（通り）

396　${}_{10}\mathrm{C}_7 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 1200$（通り）

397　5 本の横の線から 2 本，4 本の縦の線から 2 本選ぶと 1 つの平行四辺形ができる。

∴　${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 60$（個）

398　⑴　${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1 = 2520$（通り）

⑵　⑴の場合で子供による区別がつかないから

$2520 \div 4! = 105$（通り）

⑶　3冊と3冊は組の区別がつかないから

${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_3 \times 1 \div 2! = 280$（通り）

399　⑴　${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$（通り）

⑵　${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 100$(通り)

⑶　すべての選び方から，女子だけが選ばれる場合を引いて

$${}_{10}C_4 - {}_5C_4 = 205\text{(通り)}$$

⑷　特定の a，b を除いて，8人の中から2人を選べばよいから

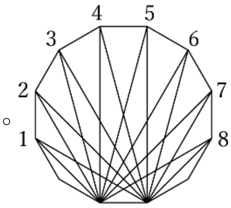
$${}_8C_2 = 28\text{(通り)}$$

⑸　a と b を除いて，8 人の中から 3 人を選べばよいから

$${}_8C_3 = 56\text{(通り)}$$

400　⑴　1 辺に対して 8 個の三角形ができる。

$\therefore\quad 12 \times 8 = 96$(個)



⑵　2辺を共有する三角形は，頂点の数だけできるから12 個ある。

三角形の総数は ${}_{12}C_3$

$\therefore\quad {}_{12}C_3 - (96 + 12) = 112$(個)

401　⑴　9 本の直線から 2 本の直線を選べば交点が 1 つできる。

$\therefore\quad {}_9C_2 = 36$（個）

⑵　9 本の直線から 3 本の直線を選べば三角形が 1 個できる。

$\therefore\quad {}_9C_3 = 84$（個）

402　⑴　6(通り)

⑵　1 から 6 までの数から 3 個選び，小さい順に

$a < b < c$ と 1 通りに決まる。

$\therefore\quad {}_6C_3 = 20$（通り）

⑶　⑴，⑵の他に

$a \leqq b = c$　の場合が　${}_6C_2 = 15$（通り）

$a = b \leqq c$　の場合が　${}_6C_2 = 15$（通り）

よって，$6 + 20 + 15 + 15 = 56$（通り）

403　⑴　B と D，C と E は同色になるので

3色を3箇所に塗る順列となり

$3! = 6$（通り）

⑵　5 色のうち 3 色を選ぶのは ${}_5C_3$ 通り。

選ばれた 3 色で塗るのは⑴より 6 通り。

よって，${}_5C_3 \times 6 = 60$（通り）

⑶　（ⅰ）　5 色で塗るとき　$5! = 120$（通り）

（ⅱ）　4 色で塗るとき，同じ色にするのは

B と D，B と E，C と E の 3 通りだから

$3 \times {}_5P_4 = 360$（通り）

（ⅲ）　3 色で塗るとき，⑵より 60(通り)

よって，$120 + 360 + 60 = 540$(通り)

404 ⑴ 5040（通り） ⑵ 144（通り）

405 ⑴ 216（個） ⑵ 81（通り）

406 ⑴ 10（個） ⑵ 10（個）

407 ⑴ 全部並べる順列の総数は $\frac{8!}{3!2!}=3360$（通り）

このうち，$e\ e$ と連続するものは $\frac{7!}{3!}=840$（通り）

よって，$3360-840=2500$（通り）

$\boxed{\text{別解}}$ $a,\ l,\ i,\ p,\ p,\ p$ の 6 文字の順列は $\frac{6!}{3!}=120$（通り）

$e,\ e$ を文字の前，後，間に入れるのは ${}_7C_2=21$（通り）

よって，$120\times21=2520$（通り）

⑵ $p,\ p,\ p,\ e,\ e,$ □，□，□の順列を考えればよい。

（□，□，□には順に $a,\ l,\ i$ が入る）

$\frac{8!}{3!2!3!}=560$（通り）

⑶ 先頭 4 つは，$a,\ l,\ i$，□の順列 $4!$

□と右 4 つに $p,\ p,\ p,\ e,\ e,$ が入るので $\frac{5!}{3!2!}$

よって，$4!\times\frac{5!}{3!2!}=240$（通り）

408 ⑴ $\frac{9!}{5!4!}=126$（通り）

⑵ A~C は $\frac{5!}{3!2!}=10$（通り）

C~B は $\frac{4!}{3!}=4$（通り）

よって，$10\times4=40$（通り）

⑶ Dを経由する行き方は $\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!2!}=24$（通り）

よって，$126-24=102$ （通り）

409 ⑴ 大人 2 人を固定させて，子供 4 人を並べればよい。

∴ ${}_4\mathrm{P}_4=24$（通り）

⑵ 大人 2人とはさまれた a をまとめて 1 人と考えて固定する。

大人の入れ替えが 2通りあるから

$2\times3!=12$（通り）

410 ⑴ $3^6=729$（通り）

⑵ ⑴で同じ数字を 6 回使う場合を除けばよい。

よって，$729-3=726$（通り）

411 ⑴ $\frac{11!}{6!5!}=462$（通り）

⑵ 奇数個ある青い球を中央におくと

$\underbrace{○○○○○}_{\text{赤}3,\ \text{青}2}$ 青 $\underbrace{○○○○○}_{\text{赤}3,\ \text{青}2}$

対称になるとき，左側が決まれば右側も決まる

∴ $\frac{5!}{3!2!}=10$（通り）

412 ⑴ 1人について，A, B 2 通りの入り方があるから

$2^6 = 64$（通り）

⑵ ⑴でA またはB だけに 6 人全員が入った場合を除けばよい。

よって，$64 - 2 = 62$（通り）

413 底面の色の決め方は6 通り。側面は 5 色の円順列だから

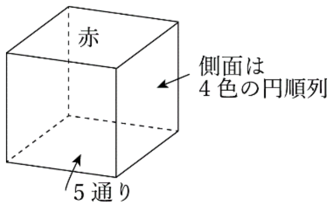
$6 \times 4! = 144$（通り）

414 ⑴ 赤を塗った面を上面に固定する。

底面は上の面以外の 5 色が使える。

側面は残り 4 色の円順列

よって，$5 \times 3! = 30$（通り）



⑵ 向い合う面のうち1 ケ所は同じ色で塗るから 5 通りある。

残りの 4 色で側面を塗るのは円順列で

$3!$（通り）

ただし，上下をひっくり返しても同じだから 2 で割る。

よって，$5 \times 3! \times \frac{1}{2} = 15$（通り）

415 ⑴ $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

⑵ $81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4$

⑶ $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

⑷ $32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$

416 ⑴ 150 ⑵ 270 ⑶ 240 ⑷ -280

417 ⑴ 448 ⑵ 1215

418 ⑴ -60 ⑵ 4480

419 一般項は $\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p(-2x)^q \cdot 3^r = \frac{5!}{p!q!r!}(-2)^q \cdot 3^r x^{2p+q}$

ただし，$p + q + r = 5,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0$ …①

x^3の係数だから，$2p + q = 3$ …②

①，②を満たす$(p,\ q,\ r)$の組合せは

$(p,\ q,\ r) = (0,\ 3,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3)$

よって，$\frac{5!}{0!3!2!}(-2)^3 \cdot 3^2 + \frac{5!}{1!1!3!}(-2)^1 \cdot 3^3$

$= -720 - 1080 = -1800$

3 節　命題と証明

420　⑴　偽(反例：$x=-3$)　　⑵　偽(反例：$c=0$ のとき$a\neq b$)

⑶　偽(反例：$x=1+\sqrt{2},\ y=1-\sqrt{2}$)

421　⑴　十分　　⑵　必要　　⑶　必要十分　　⑷　必要十分　　⑸　十分　　⑹　必要

422　⑴　m またはn は奇数である。（mまたはnは偶数でない。）

⑵　$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ である。

⑶　すべての x について0でない。

⑷　あるxについて $ax^2+bx+c<0$

⑸　$x+y\leqq 0$ または $xy\leqq 0$である。

⑹　x，yの少なくとも一方は0でない。

423　⑴　逆：$a^2=1$ ならば $a=1$ である。（偽）　（反例：$a=-1$）

裏：$a\neq 1$ ならば $a^2\neq 1$ である。（偽）　（反例：$a=-1$）

対偶：$a^2\neq 1$ ならば $a\neq 1$ である。（真）

⑵　逆：平行四辺形ならば長方形である。　（偽）

裏：長方形でないならば平行四辺形でない。（偽）

対偶：平行四辺形でないならば長方形でない。（真）

424　⑴　必要　　⑵　十分　　⑶　必要十分

425　⑴　対偶は「n が偶数ならばn^2 は偶数である。」

（証）　k を整数とする。

$n=2k$（偶数）のとき，

$n^2=4k^2=2(2k^2)$（偶数）となる。

よって，対偶が正しいから

もとの命題も正しい。

⑵　対偶は「x かつ y が奇数ならば xy は奇数である。」

（証）　$x=2k+1$，$y=2l+1$

（k，lは整数）のとき

$$
\begin{aligned}
xy&=(2k+1)(2l+1)\\
&=4kl+2k+2l+1\\
&=2(2kl+k+l)+1\\
&=2N+1\ \ (N=2kl+k+l)
\end{aligned}
$$

と表せる。

よって，対偶が正しいから

もとの命題も正しい。

426 ⑴ $(2n-1)^2+3=4n^2-4n+4$

$=4(n^2-n+1)$

よって，示された。　(証明終)

⑵ $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

$=4n(n-1)+1$

$n(n-1)$は 2 の倍数だから

$(2n-1)^2=8k+1\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

よって，示された。　(証明終)

427

〔１〕 $n=1$ のとき

$8^1-5^1=3$ となり成り立つ。

〔２〕 $n=k$ のとき成り立つとすると

$8^k-5^k=3N$（Nは自然数）と表せる。

$n=k+1$ のとき

$8^{k+1}-5^{k+1}=8(8^k-5^k)+8\cdot 5^k-5^{k+1}$

$=8\cdot 3N+(8-5)\cdot 5^k$

$=3(8N+5^k)$

と表せるから3つの倍数であり，$n=k+1$のときにも成り立つ。

〔１〕〔２〕により，すべての自然数 n について成り立つ。

428 $(x-1)(x-5)<0$ より $1<x<5$

$x^2-(a+3)x+3a\leqq 0$

$(x-3)(x-a)\leqq 0$

$a>3$ のとき　$3\leqq x\leqq a$　…①

$a<3$ のとき　$a\leqq x\leqq 3$　…②

$a=3$ のとき　$x=0$　…③

①，②，③が　$1<x<5$ に含まれればよいから

$1<a<5$

429　⑴　n を自然数として

（ⅰ）　$a = 3n$ のとき

$a^2 = 9n^2$ だから 3 で割った余りは 0

（ⅱ）　$a = 3n - 1$ のとき

$a^2 = (3n-1)^2 = 3(3n^2 - 2n) + 1$ だから

3 で割った余りは 1

（ⅲ）　$a = 3n - 2$ のとき

$a^2 = (3n-2)^2 = 3(3n^2 - 4n + 1) + 1$ だから

3 で割った余りは 1

（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）より示された。

⑵　a，b とも 3 の倍数でないとすると⑴より

左辺の$a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは2 である。

一方，右辺の C^2を 3 で割った余りは 0 か 1 であるから矛盾する。

よって，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数である。

8 章の問題

1　1円硬貨の使い方　　0 枚～5 枚の 6通り

10円硬貨の使い方　　0 枚～3 枚の 4通り

100円硬貨の使い方　　0 枚～3 枚の 4 通り

∴　$6 \times 4 \times 3 = 72$（通り）

この中で，全部 0 枚の場合の 1 通りを除いて

$72 - 1 = 71$（通り）

2　区別のつかないさいころの場合は,

(1, 2, 6)，(1, 3, 5)，(1, 4, 4)

(2, 2, 5)，(2, 3, 4)，(3, 3, 3) の6（通り）

区別のできるさいころの場合は,

(1, 2, 6)，(1, 3, 5)，(2, 3, 4) はそれぞれ $3! = 6$ 通り

(1, 4, 4)，(2, 2, 5) はそれぞれ 3 通り

(3, 3, 3) は1 通り

よって，$3 \times 6 + 2 \times 3 + 1 = 25$（通り）

3　⑴　9（通り）　⑵　9（通り）

4　⑴ ∧〇∧〇∧〇∧〇∧〇∧〇∧〇∧〇∧

黒石 5 個を∧の部分に入れればよいから

${}_9\mathrm{C}_5 = 126$（通り）

⑵　（ⅰ）黒石が 4 個続く場合∧を 2 ケ所選んで 4 個と 1 個を入れればよいから

$2 \times {}_9\mathrm{C}_2 = 72$（通り）

（ⅱ） 黒石が 5 個続く場合は∧に 5 個まとめて入れればよいから

$${}_9C_1 = 9$$（通り）

全部の並べ方は

$$\frac{13!}{8!5!} = 1287$$（通り）

よって，$1287 - (72 + 9) = 1206$（通り）

5 ⑴ （ⅰ） 男子 2 人，女子 1 人の場合

$${}_5C_2 \times {}_4C_1 = 40$$（通り）

（ⅱ） 男子 1 人，女子 2 人の場合

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$$（通り）

よって，$40 + 30 = 70$（通り）

⑵ ペアになる 3 人の選び方は

$${}_5C_3 \times {}_4C_3 = 40$$（通り）

男子 3 人と女子 3 人がペアになる場合の数は

$$3! = 6$$（通り）

よって，$40 \times 6 = 240$（通り）

6 ⑴ $\frac{11!}{6!5!} = 462$（通り）

⑵ A~C の最短経路は

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$（通り）

C~D の最短経路は

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$（通り）

D~B の最短経路は 2（通り）

よって，$10 \times 4 \times 2 = 80$（通り）

⑶ A~C~B の最短経路は

$$\frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{4!2!} = 10 \times 15 = 150$$（通り）

D を通らないのは⑵の場合を除けばよい。

よって，$150 - 80 = 70$（通り）

⑷ C を通る集合をC，D を通る集合をDとすると

$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ である。

A~C~B の最短経路は $n(C) = 150$（⑶より）

A~D~B の最短経路は

$$n(D) = \frac{9!}{5!4!} \times 2 = 252$$

A~C~D~B の最短経路は

$$n(C \cap D) = 80$$（⑵より）

よって，$n(C \cup D) = 150 + 252 - 80 = 322$（通り）

7 ⑴ ${}_8\mathrm{C}_2 \times 1 = 28$（通り）

⑵ ${}_8\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_2 \times 1 = 168$（通り）

⑶ ${}_8\mathrm{C}_4 \times 1 = 70$（通り）

⑷ ${}_8\mathrm{C}_4 \div 2! = 35$（通り）

⑸ ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times 1 \div 2! = 210$（通り）

⑹ ${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 1 \div 4! = 105$（通り）

8 ⑴ 4人と4人の組の区別がつかないから

${}_8\mathrm{C}_4 \times 1 \div 2! = 35$（通り）

どの夫婦も別のグループに分かれるのは，4組の各夫婦から

それぞれ1人ずつ選んで4人のグループをつくればよい。

よって，${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \div 2! = 8$（通り）

⑵ （ⅰ）2人と6人に分けるとき

${}_8\mathrm{C}_2 \times 1 = 28$（通り）

（ⅱ）3人と5人に分けるとき

${}_8\mathrm{C}_3 \times 1 = 56$（通り）

（ⅱ）4人と4人に分けるとき

${}_8\mathrm{C}_4 \times 1 \div 2! = 35$（通り）（⑴より）

よって，$28 + 56 + 35 = 119$（通り）

男性だけのグループができるのは

（ⅰ)のとき，2人が男性のとき

${}_4\mathrm{C}_2 \times 1 = 6$（通り）

（ⅱ)のとき，3人が男性のとき

${}_4\mathrm{C}_3 \times 1 = 4$（通り）

（ⅲ)のとき，4人が男性のとき

${}_4\mathrm{C}_4 = 1$（通り）

よって，$6 + 4 + 1 = 11$（通り）

9 ⑴ 6人のうち1人を固定し，残り7つの座席に5人が座ればよい。

よって，${}_7\mathrm{P}_5 = 2520$（通り）

⑵ 隣り合う2 つの空席を除いた残り6つの座席に6人が座ればよい。

よって，${}_6\mathrm{P}_6 = 720$（通り）

⑶ 向い合った空席以外の6つの座席に6人が座ればよい。

ただし，180° 回転すると同じになるので2で割る。

よって，${}_6\mathrm{P}_6 \div 2 = 360$（通り）

10 ⑴

百の位	十の位	一の位
0, 1 以外の 8 通り	1 以外の 9 通り	1 以外の 9 通り

よって，$8 \times 9 \times 9 = 648$（個）

⑵

0, 1, 2 以外の 7 通り	1, 2 以外の 8 通り	1, 2 以外の 8 通り

よって，$7 \times 8 \times 8 = 448$（個）

⑶ 1 が使われてないものを $n(A)$

2 が使われてないものを $n(B)$

とすると

$n(A) = 648$，$n(B) = 648$ （⑴より）

$n(A \cap B) = 448$ （⑵より）

よって，$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 648 + 648 - 448 = 848$（個）

11 ⑴ 同じ 8 個の〇を 3 つに分けると考える。

$(1,\ 1,\ 6),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4)$

$(2,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 3)$

よって， 5 通り

⑵ A，B，C の 3 つ部屋に 8 個の〇を入れると考える。

⑴より $(1,\ 1,\ 6),\ (2,\ 2,\ 4),\ (2,\ 3,\ 3)$ の場合は $\frac{3!}{2!} = 3$（通り）

$(1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4)$ の場合は $3! = 6$（通り）

よって，$3 \times 3 + 2 \times 6 = 21$（通り）

⑶ 8 人をA，B，C の 3 つの部屋に入れると考える。

8 人を 3 つの部屋に入れるのは 3^8（通り）

このうち，A，B，C のいずれか 1 つの部屋が空になるのは

$3 \times (2^8 - 2)$（通り）

A，B，C のうち 2 つの部屋が空になるのは 3（通り）

よって，$3^8 - 3 \times (2^8 - 2) - 3 = 5796$（通り）

12 $(x-1)^4$ の一般項は ${}_4\mathrm{C}_p x^{4-p}(-1)^p$ $(0 \leqq p \geqq 4)$

$(x+2)^5$ の一般項は ${}_5\mathrm{C}_q x^{5-q} \cdot 2^q$ $(0 \leqq q \geqq 5)$

$(x-1)^4(x+2)^5$ の一般項は

${}_4\mathrm{C}_p x^{4-q}(-1)^p \cdot {}_5\mathrm{C}_q x^{5-q} \cdot 2^q = {}_4\mathrm{C}_p \cdot {}_5\mathrm{C}_q (-1)^p \cdot 2^q x^{9-p-q}$

x^2 の項は $9 - p - q = 2$ より $p + q = 7$

$(p,\ q) = (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3)$ のときだから

$\quad {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_5(-1)^2 \cdot 2^5 + {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_5\mathrm{C}_4(-1)^3 \cdot 2^4 + {}_4\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_3(-1)^4 \cdot 2^3$

$= 6 \times 32 - 20 \times 16 + 10 \times 8 = -48$

13　二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると

$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2$

$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \cdots$ ①

⑴　①の式で，$x = 1$ とおくと

$(1+1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^2$

$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot 1^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^n$

よって，${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2$

$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$（証明終）

⑵　①の式で，$x = 2$ とおくと

$(1+2)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2$

$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot 2^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 2^n$

よって，${}_n\mathrm{C}_0 + 2{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2$

$\qquad + 2^3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + 2^n{}_n\mathrm{C}_n = 3^n$（証明終）

⑶　①の式で，$x = -1$ とおくと

$(1-1)^n$

$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1(-1) + {}_n\mathrm{C}_2(-1)^2$

$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3(-1)^3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$

よって，${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2$

$\qquad - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + (-1)^n{}_n\mathrm{C}_n = 0$（証明終）

14　$\sqrt{3} - \sqrt{2} = r$（有理数）と仮定すると

両辺を2乗して

$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = r^2$，$5 - 2\sqrt{6} = r^2$

$\sqrt{6} = \frac{5-r^2}{2}$

右辺は，有理数であるが，左辺 $\sqrt{6}$ は無理数である。

よって，$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ は有理数でなく無理数である。（証明終）