２章　２次関数とグラフ，方程式・不等式　解答

３節　２次関数のグラフと２次方程式・２次不等式

練習１

⑴　$y = x^2 - 6x + 4$

$x^2 - 6x + 4 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$

⑵　$y = 4x^2 + 4x + 1$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

$(2x + 1)^2 = 0$

$x = -\dfrac{1}{2}$

⑶　$y = -x^2 - x + 3 = 0$

$x^2 + x - 3 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

⑷　$y = x^2 - \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3}$

$x^2 - \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3} = 0$

$6x^2 - x - 2 = 0$

$(2x+1)(3x-2) = 0$

$x = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}$

練習２

⑴　$y = x^2 + x - 3$

$x^2 + x - 3 = 0$ の判別式を $D$

$D = 1 + 12 = 13 > 0$

共有点は2個

⑵　$y = 3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$

$D = 4 - 4 = 0$

共有点は1個

⑶　$y = -2x^2 + 2x - 1 = 0$

$D = 4 - 8 = -4 < 0$

共有点は0個

練習３

$y = -x^2 + 6x - k$

$y = 0$ の判別式を $D$ とすると

$D = 36 - 4k$

$36 - 4k > 0$　　$-4k > -36$　$k < 9$　のとき２個

$36 - 4k = 0$　　$k = 9$　のとき１個

$36 - 4k < 0$　　$-4k < -36$　$k > 9$　のとき０個

練習 4

(1) $2x-5>3$

$2x>8$

$x>4$

(2) $-4x+3 \geqq -9$

$-4x \geqq -12$

$x \leqq 3$

(3) $8-x>3-6x$

$5x>-5$

$x>-1$

(4) $x-9 \leqq 5x+3$

$-4x \leqq 12$

$x \geqq -3$

(5) $2x+1>\dfrac{x-7}{3}$

$6x+3>x-7$

$5x>-10$

$x>-2$

(6) $\dfrac{x-4}{2} \leqq \dfrac{5x+1}{4}$

$2x-8 \leqq 5x+1$

$-3x \leqq 9$

$x \geqq -3$

練習 5

(1) $x^2-5x-14>0$

$(x-7)(x+2)>0$

$x<-2,\ x>7$

(2) $x^2-2x<0$

$x(x-2)<0$

$0<x<2$

(3) $x^2-5 \geqq 0$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) \geqq 0$

$x \leqq -\sqrt{5},\ \sqrt{5} \leqq x$

(4) $2x^2-6x+1<0$

$2x^2-6x+1=0$ を解くと

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-8}}{4}=\dfrac{6\pm 2\sqrt{7}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

$\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$

(5) $-2x^2+4x+3 \leqq 0$

$-2x^2+4x+3=0$ を解くと

$2x^2-4x-3=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{10}}{4}=1\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$x \leqq 1-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ x \geqq 1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

練習 6

(1) $x^2-10x+25>0$

$(x-5)^2>0$

5 以外のすべての実数

(2) $-x^2+6x-9 \leqq 0$

$x^2-6x+9 \geqq 0$

$(x-3)^2 \geqq 0$

すべての実数

(3) $4x^2+4x+1<0$

$(2x+1)^2<0$

解はない

(4) $9x^2+4 \leqq 12x$

$9x^2-12x+4 \leqq 0$

$(3x-2)^2 \leqq 0$

$x=\dfrac{2}{3}$

練習 7

⑴ $x^2-6x+10>0$

$(x-3)^2+1>0$

∴ すべての実数

⑵ $2x^2-4x+3 \leqq 0$

$2(x^2-2x)+3 \leqq 0$

$2(x-1)^2+1 \leqq 0$

∴ 解はない

⑶ $-x^2+5x-7>0$

$x^2-5x+7<0$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}<0$

∴ 解はない

⑷ $3x^2+1 \geqq 4(x-1)$

$3x^2-4x+5 \geqq 0$

$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3} \geqq 0$

∴ すべての実数

練習 8

⑴ $\begin{cases} 4-2x \leqq 6 \\ 2x-1 \leqq 3(3-x) \end{cases}$

$-2x \leqq 2 \qquad 2x-1 \leqq 9-3x$

$x \geqq -1 \qquad 5x \leqq 10$

$x \leqq 2$

∴ $-1 \leqq x \leqq 2$

⑵ $\begin{cases} 4x-7>8-x \\ 2(x+1) \leqq 3x+2 \end{cases}$

$5x>15 \qquad 2x+2 \leqq 3x+2$

$x>3 \qquad -x \leqq 0$

$x \geqq 0$

∴ $x>3$

練習 9

⑴ $-7<3x+2<8$

$-7<3x+2$ かつ $3x+2<8$

$-3x<9 \qquad 3x<6$

$x>-3 \qquad x<2$

∴ $-3<x<2$

⑵ $3-x \leqq 4x-2<x+10$

$3-x \leqq 4x-2$ かつ $4x-2<x+10$

$-5x \leqq -5 \qquad 3x<12$

$x \geqq 1 \qquad x<4$

∴ $1 \leqq x<4$

練習 10

⑴ $\begin{cases} x+5 \leqq 3(x-1) \\ x^2-3x-18<0 \end{cases}$ $\quad -2x \leqq -8 \quad x \geqq 4$

$(x-6)(x+3)<0 \quad -3<x<6$

∴ $4 \leqq x<6$

⑵ $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ $\quad x(x-3)>0 \quad x<0,\ 3<x$

$(x-5)(x+1)<0 \quad -1<x<5$

∴ $-1<x<0,\ 3<x<5$

練習 11　$2x^2+(k+3)x+2=0$……①, $x^2-kx+k^2-6=0$……②

$D_1=(k+3)^2-4\cdot2\cdot2\geqq0$

$k^2+6k-7\geqq0$

$(k+7)(k-1)\geqq0$

$k\leqq-7,\ 1\leqq k$

$D_2=(-k)^2-4(k^2-6)\geqq0$

$-3k^2+24\geqq0$

$(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})\leqq0$

$-2\sqrt{2}\leqq k\leqq2\sqrt{2}$

$\therefore\ 1\leqq k\leqq2\sqrt{2}$

練習 12

⑴　$|x-4|=1$

$x-4=\pm1$

$x=5,\ 3$

⑵　$|x+3|=5$

$x+3=\pm5$

$x=2,\ -8$

⑶　$|1-x|=6$

$1-x=\pm6$

$-x=5,\ -7$

$x=-5,\ 7$

練習 13

⑴　$|x+1|<2$

$-2<x+1<2$

$-3<x<1$

⑵　$|x-3|>4$

$x-3<-4,\ 4<x-3$

$x<-1,\ 7<x$

⑶　$|2x-1|\leqq3$

$-3\leqq2x-1\leqq3$

$-2\leqq2x\leqq4$

$-1\leqq x\leqq2$

練習 14

⑴　$|x+1|=3x-1$

（ｉ）　$x\geqq-1$　のとき

$x+1=3x-1$

$x=1$　($x\geqq-1$を満たす。)

（ｉｉ）　$x<-1$　のとき

$-(x+1)=3x-1$

$4x=0$

$x=0$　($x<-1$を満たさない。)

（ｉ），（ｉｉ）　より $x=1$

⑵　$|2x-8|\leqq x-1$

（ｉ）　$x\geqq4$……①のとき

$2x-8\leqq x-1$

$x\leqq7$

①より　$4\leqq x\leqq7$

（ｉｉ）　$x<4$……②

$-(2x-8)\leqq x-1$

$-2x+8\leqq x-1$

$-3x\leqq-9$

$x\geqq3$

②より　$3\leqq x<4$

（ｉ），（ｉｉ）より　$3\leqq x\leqq7$

節末問題

1．　$-2 \leqq a \leqq 3,\ 1 \leqq b \leqq 4$

⑴　$-6 \leqq 3a \leqq 9$

⑵　$\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{b} \leqq 1$

⑶　$-1 \leqq a+b \leqq 7$

⑷　$-4 \leqq 2a \leqq 6,\ -12 \leqq -3b - \leqq -3$

$-4-12 \leqq 2a-3b \leqq 6-3$

$-16 \leqq 2a-3b \leqq 3$

2．

⑴　$8x^2-10x-3>0$

$(2x-3)(4x+1)>0$

$x<-\frac{1}{4},\ \frac{3}{2}<x$

⑵　$-x^2+2x+4 \geqq 0$

$x^2-2x-4 \leqq 0$

$x^2-2x-4=0$ を解くと

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=1\pm\sqrt{5}$

$1-\sqrt{5} \leqq x \leqq 1+\sqrt{5}$

⑶　$x^2-5x+7 \leqq 0$

解はない

⑷　$x^2-x+\frac{1}{4}>0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>0$

$\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数

3．$y=x^2+kx+k=0$

$D=k^2-4k$

$k^2-4k>0$　$k(k-4)>0$　$k<0,\ 4<k$ のとき　2 個

$k^2-4k=0$　$k=0,\ 4$ のとき　1 個

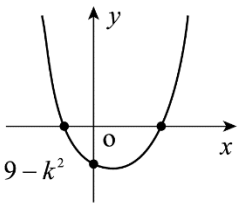
$k^2-4k<0$　$k(k-4)<0$　$0<k<4$ のとき　0 個

４．　$y=2x^2-12x+9-k^2$　のグラフで

$x=6$ のとき $y<0$ であればよい。

$9-k^2<0$

$\therefore\ k<-3,\ 3<k$



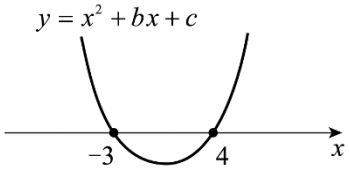

５．$y=x^2+bx+c$　のグラフが

$(-3,\ 0)$ $(4,\ 0)$ で交わればよい。

$(-3,\ 0)$　$9-3b+c=0$　……①

$(4,\ 0)$　$16+4b-c=0$　……②

①，②を解いて，$b=-1$　$c=-12$




別解

$(x+3)(x-4)<0$ より $x^2-x-12<0$

$x^2+bx+c<0$ と等しいから $b=-1,\ c=-12$

６．$x^2-(k+3)x+1\geqq 0$

$\left(x-\dfrac{k+3}{2}\right)^2+1-\left(\dfrac{k+3}{2}\right)^2\geqq 0$　$1-\left(\dfrac{k+3}{2}\right)^2$ が最小値なので

$\therefore\ 1-\left(\dfrac{k+3}{2}\right)^2\geqq 0$

$4-(k+3)^2\geqq 0$

$4-(k^2+6k+9)\geqq 0$

$-k^2-6k-5\geqq 0$

$k^2+6k+5\leqq 0$

$(k+1)(k+5)\leqq 0$　$\therefore\ -5\leqq k\leqq -1$

７．

⑴　$x^2-(a+1)x+a<0$ より

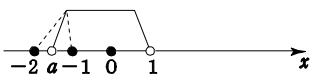
$(x-a)(x-1)<0$ であるから

この2次不等式の解は

$\begin{cases} a<1 \text{ のとき, } a<x<1 \\ a=1 \text{ のとき, 解はない。} \\ a>1 \text{ のとき, } 1<x<a \end{cases}$

⑵　$a<1$ のとき

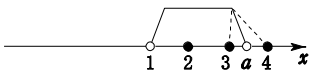
$a<x<1$ に整数0，$-1$ が含まれればよいから $-2\leqq a<-1$




$a>1$ のとき

$1<x<a$ に整数2，3 が含まれればよいから $3<a\leqq 4$

よって　$-2\leqq a<-1,\ 3<a\leqq 4$



８．．

$$\frac{8}{100}\cdot 500 \leqq \frac{5}{100}x+\frac{20}{100}(500-x) \leqq \frac{11}{100}500$$

$4000 \leqq 5x+10000-20x \leqq 5500$

$-6000 \leqq -15x \qquad -15x \leqq -4500$

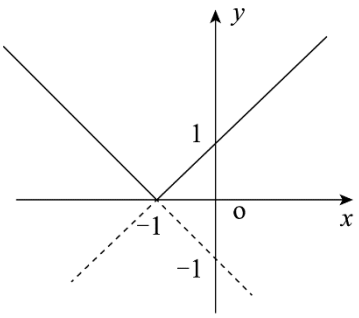
$400 \geqq x \qquad x \geqq 300$

$\therefore 300 < x < 400$

300g　以上　400g　以下

演習

(1)　$y=|x+1|$




(2)　$y=|x^2-3x|$