３章　高次方程式・式と証明　解答

１節　高次方程式

練習１

①　（右辺）$=(a+2)(a-6)=a^2-4a-12=$（左辺）　∴恒等式

②　（左辺）$=(a+1)^2=a^2+2a+1\neq a^2+1=$（右辺）　∴恒等式でない

③　（左辺）$=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3\neq x^2-2x-3=$（右辺）　∴恒等式でない

④　（左辺）$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x^2+x}=$（右辺）　恒等式

以上より，恒等式は①，④

練習２

⑴　$a(x+3)+b(x-1)=5x+3$　　$(a+b)x+3a-b=5x+3$

$$\begin{cases} a+b=5 & \cdots① \\ 3a-b=3 & \cdots② \end{cases}$$

①，②を解いて　∴　$a=2,\ b=3$

⑵　$a(x+1)^2+b(x+1)+c=2x^2-x-4$　　$ax^2+(2a+b)x+a+b+c=2x^2-x-4$

$$\begin{cases} a=2 & \cdots① \\ 2a+b=-1 & \cdots② \\ a+b+c=-4 & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③を解いて　∴　$a=2,\ b=-5,\ c=-1$

⑶　$(a-2)x^2+(a-2b+c)x+3a+b-c=0$

$$\begin{cases} a-2=0 & \cdots① \\ a-2b+c=0 & \cdots② \\ 3a+b-c=0 & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③を解いて　∴　$a=2,\ b=8,\ c=14$

⑷　$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=x^2+3$　　$(a+b+c)x^2+(a-b)x-c=x^2+3$

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots① \\ a-b=0 & \cdots② \\ -c=3 & \cdots③ \end{cases}$$

③より $c=-3$　　これを①に代入し $a+b=4\cdots④$

②，④より $a=2$　これを④に代入し $b=2$　∴ $a=2,\ b=2,\ c=-3$

練習３

$$x^3+ax^2-x-2=(x-b)(x^2+x+c)+c=x^3+x^2+cx-bx^2-bx-bc$$
$$=x^3+(1-b)x^2+(c-b)x-bc$$

$\begin{cases} a=1-b & \cdots① \\ -1=c-b & \cdots② \\ -2=-bc & \cdots③ \end{cases}$　②より $b=c+1\cdots①'$　これを③に代入し $-2=-(c+1)c$

$c^2+c-2=0$　$\therefore c=-2,\ 1$

$c=-2$ のとき②$'$より $b=-1$　①より　$a=2$

$c=1$ のとき②$'$より $b=2$　①より　$a=-1$

$\therefore$　$a=2,\ b=-1,\ c=-2$ または $a=-1,\ b=2,\ c=1$

練習４

⑴　$\dfrac{2}{x(x+2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+2}$　　$\therefore$ $2=(a+b)x+2a$

$\begin{cases} a+b=0 & \cdots① \\ 2a=2 & \cdots② \end{cases}$

①，②を解いて

$\therefore$　$a=1,\ b=-1$

⑵　$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$　　$\therefore$ $x-3=(a+b)x-2a-b$

$\begin{cases} a+b=1 & \cdots① \\ 2a+b=3 & \cdots② \end{cases}$

①，②を解いて

$\therefore$　$a=2,\ b=-1$

練習５

$P(x)=2x^3-7x^2-5x+4$ とおく。

⑴　$P(1)=-6$　⑵　$P(2)=-18$　⑶　$P(-1)=0$

練習６

$P(x)=4x^3-3x+1$ とおくと

⑴　$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)-3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=2$　　⑵　$P\left(\dfrac{2}{3}\right)=4\cdot\dfrac{8}{27}-3\cdot\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{27}$

練習７

$P(x)=x^3+ax+8$ とおくと $P(-3)=-3a-19=2$　$\therefore a=-7$

練習 8

$P(x)$を$(x+1)(x-3)$で割った商を$Q(x)$，余りを$ax+b$とおくと

$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$$\begin{cases} P(-1)=-a+b=7 & \cdots① \\ P(3)=3a+b=-9 & \cdots② \end{cases}$$

①，②を解いて　$a=-4,\ b=3$

$\therefore\ -4x+3$

練習 9

$P(x)=x^3-x^2-5x-3$ とおくと $P(-1)=0$ より $x+1$ は因数である。

$P(2)=-9$ より $x-2$ は因数でない。

$P(3)=0$ より $x-3$ は因数である。

以上より，因数であるものは$x+1,\ x-3$

練習 10

⑴　$P(x)=x^3-7x+6$ とおくと $P(1)=0$ だから $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

$$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$$

⑵　$P(x)=x^3-3x^2+4$ とおくと $P(-1)=0$ だから $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

⑶　$P(x)=x^3+x^2-8x-12$ とおくと $P(-2)=0$ だから $P(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$$P(x)=(x+2)(x^2-x-6)=(x+2)^2(x-3)$$

⑷　$P(x)=2x^3+x^2-13x+6$ とおくと $P(2)=0$ だから $P(x)$ は $x-2$ で割り切れる。

$$P(x)=(x-2)(2x^2+5x-3)=(x-2)(2x-1)(x+3)$$

練習 11

⑴ $(x+1)(x^2-x+1)=0$ と因数分解できるから，　$x+1=0$ または $x^2-x+1=0$

$\therefore\ x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑵ $(x-3)(x^2+3x+9)=0$ と因数分解できるから, $x-3=0$ または $x^2+3x+9=0$

$\therefore\ x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

⑶ $(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$ と因数分解できるから, $2x-1=0$ または $4x^2+2x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}$

練習 12

⑴ $(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$ と因数分解できるから, $x^2+1=0$ または $x+1=0$ または $x-1=0$

$\therefore x=\pm1,\ \pm i$

⑵ $X=x^2$ とおくと, $X^2-2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0\quad (x^2+4)(x^2-2)=0$

$\therefore\ x=\pm2i,\ \pm\sqrt{2}$

⑶ $X=x^2+x$ とおくと, $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$

$(x^2+x-2)(x^2+x^2-6)=0\quad (x+2)(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3,\ \pm2,\ 1$

⑷ $x^4+3x^2+4=x^4+4x^2-x^2=(x^2+2)^2-x^2=(x^2-x+2)(x^2+x+2)=0$

$x^2-x+2=0$ または $x^2+x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{\pm1\mp\sqrt{7}i}{2}$

練習 13

⑴　$P(x)=x^3+4x^2-8$ とおくと $P(-2)=0$ だから $P(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2+2x-4)=0$

$\therefore x=-2,\ -1\pm\sqrt{5}$

⑵　$P(x)=x^3-2x^2-7x-4$ とおくと $P(-1)=0$ だから $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-3x-4)=(x+1)^2(x-4)=0$

$\therefore x=-1,\ 4$

⑶　$P(x)=x^3-4x^2+4x-3$ とおくと $P(3)=0$ だから $P(x)$ は $x-3$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(x-3)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=3\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑷　$P(x)=x^4-x^3-5x^2+3x+2$ とおくと $P(1)=0$ だから $P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

$P(x)=(x-1)(x^3-5x-2)$, $Q(x)=x^3-5x-2$ とおくと

$Q(-2)=0$ だから $Q(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=1,\ -2,\ 1\pm\sqrt{2}$

練習 14

⑴　$P(x)=3x^3-4x^2-2x+1$ とおくと $P\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$ だから $P(x)$ は $3x-1$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(3x-1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

⑵　$P(x)=2x^3-3x^2+4x+3$ とおくと $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ だから $P(x)$ は $2x+1$ で割り切れる。

$\therefore P(x)=(2x+1)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2},\ 1\pm\sqrt{2}i$

節末問題

１．

⑴ $x^3+ax+3=(x-1)(x^2+bx+c)=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$

$$\therefore \begin{cases} b-1=0 & \cdots① \\ a=c-b & \cdots② \\ 3=-c & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③を解いて

$a=-4,\ b=1,\ c=-3$

⑵ 分母を払って $1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$

$$\therefore \begin{cases} a+b=0 & \cdots① \\ -a+b+c=0 & \cdots② \\ a+c=1 & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③を解いて

$a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3},\ c=\dfrac{2}{3}$

２．

⑴ $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+1}$ とおくと $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{a(x+1)+b(x-3)}{(x-3)(x+1)}$

分母を払って

$$\begin{aligned} a(x+1)+b(x-3)&=1 \\ (a+b)x+a-3b&=1 \end{aligned} \qquad \begin{cases} a+b=0 & \cdots① \\ a-3b=1 & \cdots② \end{cases}$$

①，②を説いて　$a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{1}{4}$

$$\therefore \frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$$

⑵ $\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$ とおくと $\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

分母を払って

$$\begin{aligned} 3x+1&=a(x-1)+b(x+1) \\ &=(a+b)x-a+b \end{aligned} \qquad \begin{cases} a+b=3 & \cdots① \\ -a+b=1 & \cdots② \end{cases}$$

$$\therefore \frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

3．

$P(x)$ を $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x-4)(x+1)Q(x)+ax+b$ であり，$x-4$ で割り切れ，$x+1$ で割ると 5 余るから

$$\begin{cases} P(4)=4a+b=0 & \cdots① \\ P(-1)=-a+b=5 & \cdots② \end{cases}$$

①，②を解いて　$a=-1,\ b=4$

よって，求める余りは$-x+4$

4．

⑴　$P(x)$ を x^2+x-2 で割った商を $Q(x)$ とすると

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+5x-3=(x+2)(x-1)Q(x)+5x-3$ だから$\cdots①$

$$\begin{cases} P(-2)=-8+4a+b=-13 \\ P(1)=1+a+b=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a+b=-5 & \cdots② \\ a+b=1 & \cdots③ \end{cases}$$

②，③を解いて

$a=-2,\ b=3$

また，これを①に代入して　$x^3-2x^2+3=(x^2+x-2)Q(x)-5x+3$

さらに商は　$Q(x)=(x^3-2x^2-5x+6)\div(x^2+x-2)=x-3$

⑵　3次式 $P(x)$ の x^3 の係数が1なので，x^2-2x+2 で割った商を $x+1$ とおいてよい。

$P(x)=(x^2-2x+2)(x+c)=x^3+(c-2)x^2+(-2c+2)x+2c$

$$\begin{cases} a=c-2 & \cdots① \\ -2c+2=0 & \cdots② \\ b=2c & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③を解いて

$a=-1,\ b=2$　商は $x+1$

5．

⑴　$2x^4+7x^2+3=(2x^2+1)(x^2+3)=0$ だから，$2x^2+1=0$ または $x^2+3=0$

$\therefore x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \pm\sqrt{3}i$

⑵　$X=x^2+2x$ とおくと，$(x^2+2x)(x^2+2x-1)=6$ は $X(X-1)=6$

$X^2-X-6=0$

$(X-3)(X+2)=0$

$X-3=0$ または $X+2=0$

$x^2+2x-3=0$ または $x^2+2x+2=0$

よって，$x=1,\ -3,\ -1\pm i$

⑶　$P(x)=3x^3-8x+8$ とおくと $P(-2)=0$ だから $P(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$\therefore\ P(x)=(x+2)(3x^2-6x+4)=0$

よって，$x=-2,\ \dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{3}$

⑷　$x^3+3x^2+2x-60=0$ と変形し $P(x)=x^3+3x^2+2x-60$ とおくと $P(3)=0$ だから $P(x)$ は $x-3$ で割り切れる。

$P(x)=(x-3)(x^2+-6x+20)$

よって，$x=3,\ -3\pm\sqrt{11}i$

６．$x^3+ax^2+x+b=0$ に $2+i$ を代入すると $(2+i)^3+a(2+i)^2+(2+i)+b=0$

$\therefore\ (3a+b+4)+4(a+3)i=0$　$\begin{cases} 3a+b+4=0 & \cdots① \\ a+3=0 & \cdots② \end{cases}$　②より $a=-3$

これを①に代入し $b=5$

$\therefore a=-3,\ b=5$

このとき，元の方程式は $x^3-3x^2+x+5=0$ となる。$P(x)=x^3-3x^2+x+5$ とおくと $P(-1)=0$

だから $P(x)$ は $x+1$ で割り切れ $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=0$　$\therefore\ x=-1,\ 2\pm i$

よって，残りの解は $x=-1,\ 2-i$

７．

⑴　$P(1)=1+(a-1)+(2-a)-2=0$

⑵　⑴より $P(x)$ は $x-1$ で割り切れ，$P(x)=(x-1)(x^2+ax+2)$

$x^2+ax+2=0$ が $x=1$ を解にもつとき $1+a+2=0$ より $a=-3$

$x^2+ax+2=0$ の判別式は

$D=a^2-8=(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$

$D>0$ のとき $a<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<a$

$D=0$ のとき $a=\pm2\sqrt{2}$

$D<0$ のとき $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

よって，実数解の個数は次のように分類される。

$a<-3,\ -3<a<-2\sqrt{2},2\sqrt{2}<a$ のとき 3 個

$a=-3,\ -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$ のとき 2 個

$-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ のとき 1 個