３章　高次方程式・式と証明　解答

２節　式と証明

練習１

⑴　［証明］

$$（右辺）=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2+1\right)^2-x^2=x^4+2x^2+1-x^2=x^4+x^2+1=（左辺）$$

⑵　［証明］

$$（左辺）=\left(a^2-b^2\right)\left(x^2-y^2\right)=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$$

$$（右辺）=\left(ax+by\right)^2-\left(ay+bx\right)^2=a^2x^2+b^2y^2+\cancel{2abxy}-\left(a^2y^2+b^2x^2+\cancel{2abxy}\right)$$

$$=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$$

∴（左辺）＝（右辺）

⑶　［証明］

$$（左辺）=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

$$=a^2+\cancel{ab^2}+\cancel{ac^2}-\cancel{a^2c}-abc-\cancel{ca^2}+\cancel{a^2b}+b^3+\cancel{bc^2}-\cancel{ab^2}-\cancel{b^2c}-abc$$

$$+\cancel{a^2c}+\cancel{b^2c}+c^3-abc-\cancel{bc^2}-\cancel{c^2a}$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc=（右辺）$$

練習２

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと $a=kb,\ c=kd$ だから

⑴　［証明］

$$(左辺)=\frac{a}{a+b}=\frac{kb}{kb+b}=\frac{k}{k+1}\quad(右辺)=\frac{c}{c+d}=\frac{kd}{kd+d}=\frac{k}{k+1}$$

∴（左辺）＝（右辺）

⑵　［証明］

$$(左辺)=\frac{a+b}{a-b}=\frac{kb+b}{kb-b}=\frac{k+1}{k-1}\quad(右辺)=\frac{c+d}{c-d}=\frac{kd+d}{kd-d}=\frac{k+1}{k-1}$$

∴（左辺）＝（右辺）

練習３

⑴　［証明］

$c=-\left(a+b\right)$

$(左辺)=a^2-bc=a^2+b\left(a+b\right)=a^2+ab+b^2$

$(中辺)=b^2-ca=b^2+\left(a+b\right)a=b^2+a^2+ab$

$(右辺)=c^2-ab=\left(a+b\right)^2-ab=a^2+ab+b^2$

∴（左辺）＝（中辺）＝（右辺）

⑵　［証明］

$c=-\left(a+b\right)$だから

$(左辺)=ab\left(a+b\right)-b\left(a+b\right)\left(-a\right)-\left(a+b\right)a\left(-b\right)=3ab\left(a+b\right)=-3abc=(右辺)$

練習４

［証明］

$a>b>c>d$ より $a-d>0,\ b-c>0$ だから

$(左辺)-(右辺)=ab+cd-\left(ac+bd\right)=a\left(b-c\right)+\left(c-b\right)d=\left(a-d\right)\left(b-c\right)>0$

練習５

⑴　［証明］

$(左辺)=a^2+ab+b^2=a^2+2\cdot\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

等号成立条件は$a+\frac{1}{2}b=0$ かつ $b=0$ すなわち $a=b=0$

⑵　［証明］

$(左辺)-(右辺)=\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(ax+by\right)^2$

$=\cancel{a^2x^2}+a^2y^2+b^2x^2+\cancel{b^2y^2}-\left(\cancel{a^2x^2}+\cancel{b^2y^2}+2abxy\right)$

$=a^2y^2+b^2x^2-2abxy=\left(ay-bx\right)^2\geqq 0$

等号成立条件は$ay=bx$

練習 6

⑴　［証明］

$x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より　　$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\cdot\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$

等号成立条件は $x=\dfrac{1}{x},\ x^2=1$　$\therefore x=\pm1$　$x>0$ より $x=1$

⑵　［証明］

$\dfrac{x}{y}>0,\ \dfrac{y}{x}>0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より

$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+2=4$

等号成立条件は $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{x}$　$x^2=y^2$　$\therefore x=\pm y$　$x>0,\ y>0$ より $x=y$

練習 7

［証明］

$a>0,\ b>0$ より，$\sqrt{2(a+b)}>0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ だから

$(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2=\left(\sqrt{2(a+b)}\right)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geqq 0$

$\therefore$(左辺)$\geqq$(右辺)

等号成立条件は $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$　　$a=b$

節末問題

１．

⑴　［証明］

$c=-(a+b)$ だから

$(\text{左辺})=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2=(a-b)(2a+b)$

$(\text{右辺})=(b-a)(c-a)=(b-a)(-a-b-a)=(a-b)(2a+b)$

$\therefore(\text{左辺})=(\text{右辺})$

⑵　［証明］

$c=-(a+b)$ だから

$(\text{左辺})=a^3+b^3+(-a-b)^3=\cancel{a^3}+\cancel{b^3}-(\cancel{a^3}+3a^2b+3ab^2+\cancel{b^3})=-3ab(a+b)=3abc=(\text{右辺})$

２．

［証明］

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと，　$x=ka,\ y=kb.\ z=kc$ だから

$(\text{左辺})=(a^2+b^2+c^2)(k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2)=k^2(a^2+b^2+c^2)^2=(ka^2+kb^2+kc^2)^2$

$=(ax+by+cz)^2=(\text{右辺})$

３．　$a^2=bc\ \cdots①,\ b^2=ac\ \cdots②$

⑴　①，②を辺々掛けて

$a^2b^2=abc^2 \quad \therefore ab=c^2$

⑵　①－②より

$a^2-b^2=bc-ac$

$(a+b)(a-b)=c(b-a)$

$(a-b)(a+b+c)=0$

$a \fallingdotseq b$ より $a+b+c=0$

⑶　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{bc+ca+ab}{abc}$

$=\dfrac{c(a+b)+ab}{abc}$

⑵より $a+b=-c$ を代入して

$(\text{与式})=\dfrac{-c^2+ab}{abc}$

⑴より $ab=c^2$ だから

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

4．

⑴　［証明］

$(\text{左辺})-(\text{右辺})=5\left(a^2+b^2\right)-\left(a+2b\right)^2=4a^2+b^2-4ab=\left(2a-b\right)^2\geqq 0$

等号成立条件は$2a-b=0$　$\therefore 2a=b$

⑵　［証明］

$(\text{左辺})-(\text{右辺})=a^2+b^2-2\left(a-b-1\right)=a^2-2a+1+b^2+2b+1=\left(a-1\right)^2+\left(b+1\right)^2\geqq 0$

等号成立条件は$a-1=0$ かつ $b+1=0$, すなわち, $a=1$ かつ $b=-1$

5．

［証明］

$m+n$ をかけて分母を払うと $a\left(m+n\right)<na+mb<b\left(m+n\right)$

$a-b<0,\ m>0,\ n>0$ より

$(\text{左辺})-(\text{中辺})=a\left(m+n\right)-\left(na+mb\right)=m\left(a-b\right)<0$

$(\text{中辺})-(\text{右辺})=na+mb-b\left(m+n\right)=n\left(a-b\right)<0$

$\therefore$(左辺) < (中辺) < (右辺)

6．

⑴　［証明］

$\dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0$だから，相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$　$\therefore \sqrt{ab}\geqq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

等号成立条件は $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$　$\therefore a=b$

⑵　［証明］

$ab>0,\ \dfrac{4}{ab}>0$だから，相加平均と相乗平均の関係より

$(\text{左辺})=ab+\dfrac{4}{ab}+5\ \geqq\ 2\sqrt{\cancel{ab}\cdot\dfrac{4}{\cancel{ab}}}+5=9=(\text{右辺})$

等号成立条件は$ab=\dfrac{4}{ab}$　$\therefore a^2b^2=4$　$\therefore ab=\pm 2$　$a>0,\ b>0$ より $ab=2$

⑶　［証明］

$a>0,\ b>0,\ c>0$だから，相加平均と相乗平均の関係より

$a+b\ \geqq\ 2\sqrt{ab}$, $b+c\ \geqq\ 2\sqrt{bc}$, $c+a\ \geqq\ 2\sqrt{ca}$

$\therefore \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ \geqq\ 8\sqrt{ab\cdot bc\cdot ca}=8abc$

等号成立条件は$a=b,\ b=c,\ c=a$　$\therefore a=b=c$

7．

⑴　［証明］

$(右辺)^2-(左辺)^2=\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+4b}\right)^2=4\sqrt{ab}\ \geqq\ 0$

$\sqrt{a}+2\sqrt{b}\ \geqq\ 0,\ \sqrt{a+4b}\ \geqq\ 0$ ，(左辺) ≦ (右辺)

等号成立条件は $ab=0$

⑵　［証明］

$a \geqq b$ より

$(右辺)^2-(左辺)^2=\left(\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\ \geqq\ 0$

$\sqrt{a-b}\ \geqq\ 0,\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\ \geqq\ 0$ より, (左辺) ≦ (右辺)

等号成立条件は $\sqrt{b}=0$ かつ $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ すなわち $a=b=0$

8． $a>b$ …① $c>d$ ， …②

①の両辺に c を加えて

$a+c>b+c$ （性質〔2〕）

②両辺に b を加えて

$b+c>b+d$ （性質〔2〕）

これより

$a+c>b+d$ （性質〔1〕）