

4章 関数とグラフ 解答

1節 関数とグラフ

練習1

(1) $f(x) = 3x$ のとき, $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$ よって, 奇関数

(2) $f(x) = -x^2 + 3$ のとき, $f(-x) = -(-x)^2 + 3 = -x^2 + 3 = f(x)$ よって, 偶関数

(3) $f(x) = x + 1$ のとき, $f(-x) = -x + 1$ だから $f(x) \neq f(-x)$ かつ $f(-x) \neq -f(x)$
よって, どちらでもない

(4) $f(x) = x^2 + x$ のとき, $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ だから

$f(x) \neq f(-x)$ かつ $f(-x) \neq -f(x)$
よって, どちらでもない

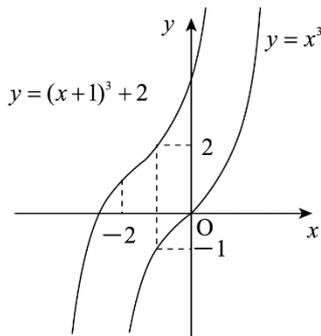
(5) $f(x) = x^3 - x$ のとき, $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

よって, 奇関数

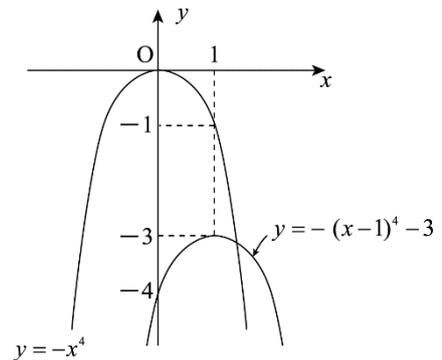
(6) $f(x) = |x|$ のとき, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ よって, 偶関数

練習2

(1) $y = (x+1)^3 + 2$ のグラフは $y = x^3$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したもの

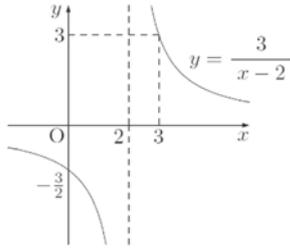


(2) $y = -(x-1)^4 - 3$ のグラフは $y = -x^4$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に -2 だけ平行移動したもの

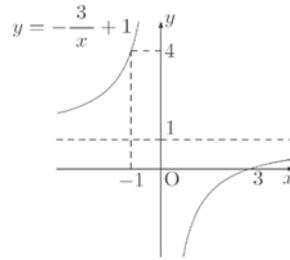


練習 3

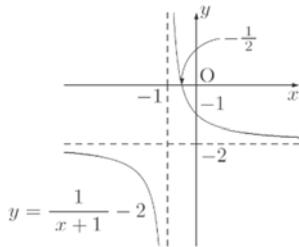
(1) 漸近線は $x = 2, y = 0$



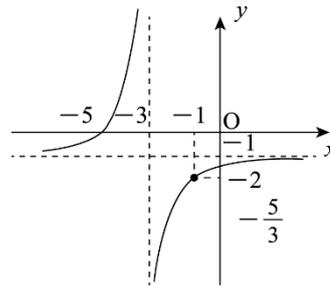
(2) 漸近線は $x = 0, y = 1$



(3) 漸近線は $x = -1, y = -2$



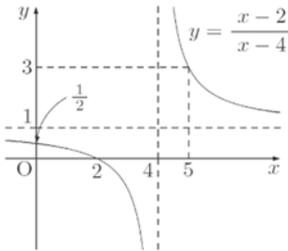
(4) 漸近線は $x = -3, y = -1$



練習 4

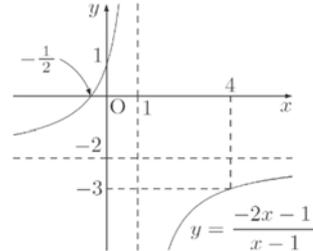
$$(1) y = \frac{x-2}{x-4} = \frac{(x-4)+2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$$

だから、漸近線は $x = 4, y = 1$



$$(2) y = \frac{-2x-1}{x-1} = \frac{-2(x-1)-3}{x-1} = -2 - \frac{3}{x-1}$$

だから、漸近線は $x = 1, y = -2$



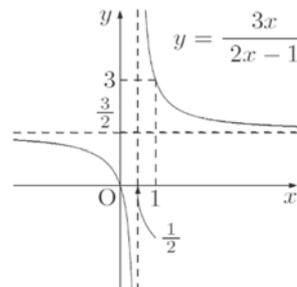
$$(3) y = \frac{3x}{2x-1} = \frac{3(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4(x-\frac{1}{2})}$$

だから、漸近線は $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

別解

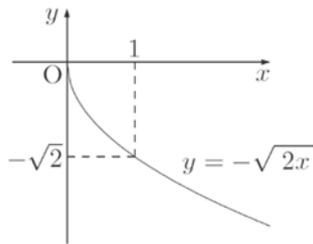
$$2x-1 \overline{) \frac{3}{2} 3x} \quad \text{より} \quad y = \frac{\frac{3}{2}}{2x-1} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4(x-\frac{1}{2})} + \frac{3}{2}$$

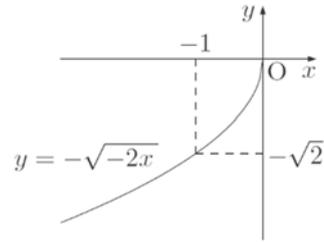


練習 5

(1)



(2)

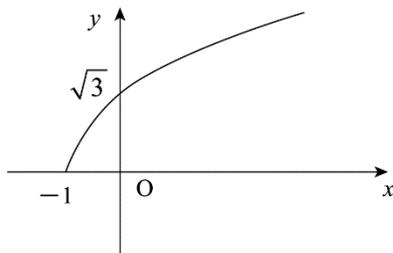


練習 6

(1) $y = \sqrt{3x+3} = \sqrt{3(x+1)}$

$3x+3 \geq 0$ より

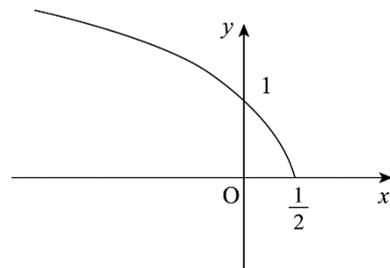
定義域 $x \geq -1$, 値域 $y \geq 0$



(2) $y = \sqrt{1-2x}$

$1-2x \geq 0$ より

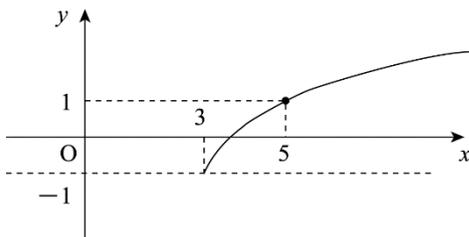
定義域 $x \leq \frac{1}{2}$, 値域 $y \geq 0$



(3) $y = \sqrt{2x-6} - 1 = \sqrt{2(x-3)} - 1$

$2x-6 \geq 0$ より

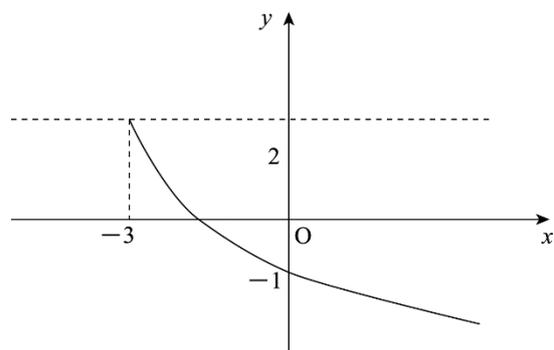
定義域 $x \geq 3$, 値域 $y \geq -1$



(4) $y = -\sqrt{3x+9} + 2$

$3x+9 \geq 0$ より

定義域 $x \geq -3$, 値域 $y \leq 2$



練習 7

$$y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3$$

$$\frac{3x+1}{x-1} = x+2$$

$$3x+1 = (x+2)(x-1)$$

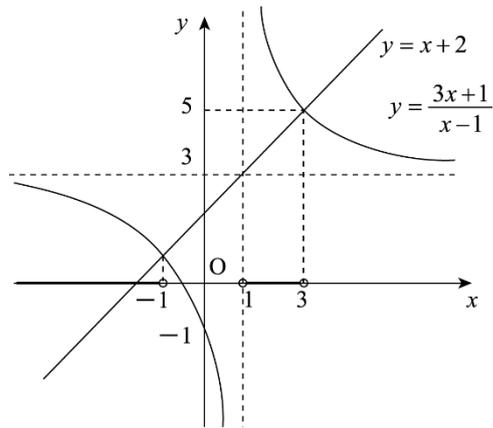
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1, 3$$

右のグラフより求める不等式の解は

$$x < -1, 1 < x < 3$$



練習 8 $y = \sqrt{2x+8} = \sqrt{2(x+4)}$

$$\sqrt{2x+8} = x+1$$

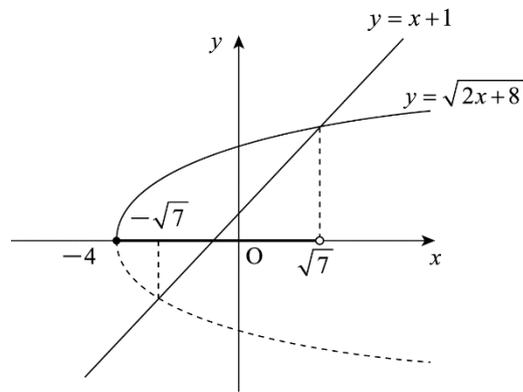
$$2x+8 = (x+1)^2$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

右のグラフより方程式の解は $x = \sqrt{7}$

求める不等式の解は $-4 < x < \sqrt{7}$



練習 9

(1) $y = 3x+1 \quad (x \geq 0)$

x について解くと $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ x と y を入れかえて $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

元の関数の定義域, 値域はそれぞれ $x \geq 0, y \geq 1$ だから

逆関数の定義域, 値域は $x \geq 1, y \geq 0$

(2) x について解くと $x = -\frac{1}{2}y + 1$ x と y を入れかえて $y = -\frac{1}{2}x + 1$,

元の関数の定義域, 値域はそれぞれ $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4$ だから,

逆関数の定義域は $0 \leq x \leq 4$, 値域は $-1 \leq y \leq 1$

(3) 両辺を 2 乗して $y^2 = x+2 \therefore x = y^2 - 2$ x と y を入れかえて $y = x^2 - 2$,

元の関数の定義域, 値域はそれぞれ $-1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ だから,

逆関数の定義域は $1 \leq x \leq 2$, 値域は $-1 \leq y \leq 2$

(4) 両辺に $\frac{x+1}{y}$ をかけて $x+1 = \frac{1}{y} \therefore x = \frac{1}{y} - 1$ x と y を入れかえて $y = \frac{1}{x} - 1$

元の関数の定義域は $x < -1, x > -1$, 値域は $y < 0, y > 0$ だから,

逆関数の定義域は $x < 0, x > 0$, 値域は $y < -1, y > -1$

練習 10

(1) x について解くと, $x^2 = y - 2$ より $x \leq 0$ だから, $x = -\sqrt{-y-2}$ x と y を入れ換えて $y = -\sqrt{-x-2}$
 定義域は $x \leq -2$, 値域は $y \leq 0$

(2) x について解くと, $x^2 = 2y - 4$ より $x \leq 0$ だから
 $x = -\sqrt{2y-4}$, x と y を入れ換えて $y = -\sqrt{2x-4}$
 定義域は $x \geq 2$, 値域 $y \leq 0$

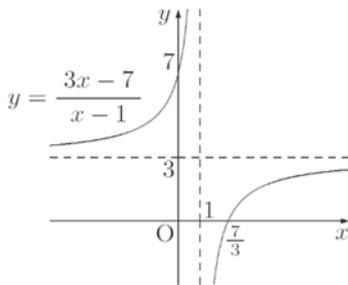
練習 11

- (1) $(g \circ f)(x) = 2(x^3 - 3) + 1 = 2x^3 - 5$
 (2) $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x - 2$
 (3) $(f \circ f)(x) = (x^2 - 3)^2 = x^4 - 6x + 6$

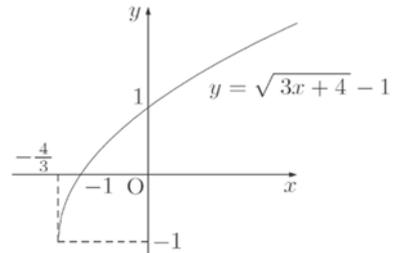
節末問題

1.

(1)



(2)

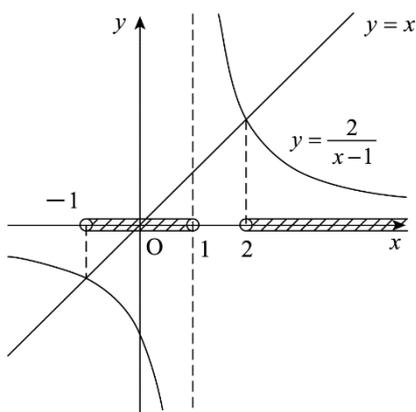


2.

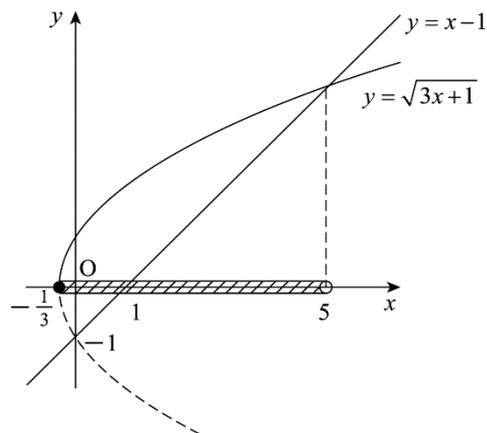
(1) $\frac{2}{x-1} = x$
 $2 = x(x-1)$
 $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1, 2$

(2) $\sqrt{3x-1} = x-1$
 両辺 2 乗して
 $3x+1 = (x-1)^2$
 $x^2 - 5x = 0$
 $x(x-5) = 0$
 $x = 0, 5$
 $x = 0$ はもとの方程式を満たさないから不適
 $\therefore x = 5$

(3) 下のグラフより $-1 < x < 1$, $x > 2$



(4) 下のグラフより $-\frac{1}{3} \leq x < 5$



3.

(1) ①は $y = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ と変形でき

②は $y = \frac{1-2(x-1)-2}{x-1} = -2 - \frac{1}{x-1} = -2 - \frac{1}{(x-2)+1}$ と変形できるから

x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 平行移動すると重ねられる

(2) ②は $y = \sqrt{-2(x+5)+4} + 1 + 3$ と変形できるから

x 軸方向に -5 , y 軸方向に 2 平行移動すると重ねられる

4. 題意より $f(-1) = -a + b = 8 \dots \textcircled{1}$

また $f^{-1}(2) = 1$ より $f(1) = 2$ だから $f(1) = a + b = 2 \dots \textcircled{2}$

①, ②より $a = -3$, $b = 5$

5.

$$(1) \quad y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad \text{より} \quad x = -3y + 6$$

x と y を入れ換えて $y = -3x + 6$

$$x \geq 0 \text{ のとき } y \geq 2$$

$$\therefore y = -3x + 6 \quad (x \leq 2)$$

$$(2) \quad x^2 = 1 - y \quad \text{より} \quad x \geq 0 \text{ だから } x = \sqrt{1 - y}$$

x と y を入れ換えて $y = \sqrt{1 - x}$

$$x \geq 0 \text{ のとき } y \leq 1$$

$$\therefore y = \sqrt{1 - x} \quad (x \leq 1)$$

$$(3) \quad y = \sqrt{2x - 1} \text{ の定義域は } x \geq \frac{1}{2}, \text{ 値域は } y \geq 0$$

$$\text{両辺 2 乗して } y^2 = 2x - 1 \quad \text{より} \quad x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ換えて } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

(4) x について解くと

$$(x - 2)y = 2x - 1, \quad x(y - 2) = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{y - 2} \quad x \text{ と } y \text{ を入れ換えて}$$

$$\therefore y = \frac{x - 1}{x - 2}$$

6.

$$(g \circ f)(x) = \frac{\frac{1}{x-1} + a}{\frac{1}{x-1}} = 1 + a(x-1) \quad (f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{x+a}{x} - 1} = \frac{x}{a}$$

$$1 + a(x-1) = \frac{x}{a} \quad \text{より} \quad (a^2 - 1)x + a - a^2 = 0$$

x についての恒等式だから

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ a - a^2 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } a = 1$$