５章　指数関数・対数関数　解答

２節　対数関数

練習１

⑴　$2 = \log_3 9$

⑵　$5 = \log_2 32$

⑶　$-\dfrac{2}{3} = \log_8 \dfrac{1}{4}$

⑷　$0 = \log_5 1$

練習２

⑴　$10^2 = 100$

⑵　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

⑶　$3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

練習３

⑴　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \times \log_5 5 = 3 \times 1 = 3$

⑵　$\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 \dfrac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2 \times \log_2 2 = -2$

⑶　$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \log_3 3 = \dfrac{1}{2}$

練習４

⑴　$\log_8 2 = x$ とする

$8^x = 2$

$\left(2^3\right)^x = 2^1$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1 \qquad \therefore\ x = \dfrac{1}{3}$

⑵　$\log_4 2\sqrt{2} = x$ とする

$4^x = 2\sqrt{2}$

$\left(2^2\right)^x = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}}$

$2^{2x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$2x = \dfrac{3}{2} \qquad \therefore\ x = \dfrac{3}{4}$

⑶　$\log_{\frac{1}{9}} 27 = x$ とする

$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 27$

$\left(3^{-2}\right)^x = 3^3$

$3^{-2x} = 3^3$

$-2x = 3 \qquad \therefore\ x = -\dfrac{3}{2}$

練習 5

(1) $\log_{10} 10\sqrt{10} = p$

$10^{p} = 10\sqrt{10}$

$10^{p} = 10^{1} \times 10^{\frac{1}{2}}$

$10^{p} = 10^{\frac{3}{2}}$ $\quad \therefore\ p = \dfrac{3}{2}$

(2) $\log_5 M = -2$

$5^{-2} = M$

$\dfrac{1}{5^{2}} = M$ $\quad \therefore\ M = \dfrac{1}{25}$

(3) $\log_a 27 = 3$

$a^{3} = 27$

$a = 3^{3}$ $\quad \therefore\ a = 3$

練習 6

$\log_a M = p,\ \log_a N = q$ とおくと

$M = a^{p},\ N = a^{q}$

$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^{p}}{a^{q}} = a^{p-q}$

ゆえに, $\log_a \dfrac{M}{N} = p - q$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

練習 7

(1) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \times 12) = \log_6 36 = \log_6 6^{2} = 2\log_6 6 = 2$

(2) $\log_5 7 - \log_5 35 = \log_5 \dfrac{7}{35} = \log_5 \dfrac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1 \times \log_5 5 = -1$

練習 8

(1) $\log_2 \sqrt{10} + \log_2 \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \log_2 \sqrt{10} \times \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \log_2 2 = 1$

(2) $2\log_3 3\sqrt{2} - \log_3 2 = \log_3 \left(3\sqrt{2}\right)^{2} - \log_3 2$

$$= \log_3 \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^{2}}{2} = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = \log_3 3^{2} = 2\log_3 3 = 2$$

(3) $\dfrac{1}{3}\log_{10} 8 + \log_{10} \dfrac{3}{2} - \log_{10} 3 = \log_{10} 8^{\frac{1}{3}} + (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) - \log_{10} 3$

$$= \log_{10}\left(2^{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \log_{10} 2 = \log_{10} 2 - \log_{10} 2 = 0$$

(4) $\log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} - 2\log_3 \sqrt{6} + \dfrac{1}{2}\log_3 2 = \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \log_3\left(\sqrt{6}\right)^{2} + \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \log_3 6 + \log_3 \sqrt{2}$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} \div 6 \times \sqrt{2} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\log_3 3 = -2$$

練習 9

(1) $\log_{10} 12 = \log_{10} 2^2 \times 3 = \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2p + q$

(2) $\log_{10} \dfrac{27}{8} = \log_{10} 27 - \log_{10} 8 = \log_{10} 3^3 - \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 3 - 3\log_{10} 2 = 3q - 3p$

(3) $\log_{10} \sqrt{15} = \log_{10} 15^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_{10} 15 = \dfrac{1}{2}\log_{10} \dfrac{3\times 10}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2\right) = \dfrac{1}{2}(q + 1 - p)$

練習 10

(1) $\log_{16} 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^4} = \dfrac{5\log_2 2}{4\log_2 2} = \dfrac{5}{4}$

(2) $\log_3 8 \times \log_4 3 = \log_3 2^3 \times \dfrac{\log_3 3}{\log_3 4} = 3\log_3 2 \times \dfrac{1}{2\log_3 2} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\log_2 48 - \log_4 36 = \log_2 2^4 \times 3 - \dfrac{\log_2 36}{\log_2 4}$

$= \log_2 2^4 + \log_2 3 - \dfrac{\log_2 6^2}{\log_2 2^2} = 4 + \log_2 3 - \log_2 6 = 4 + \log_2 3 - \left(\log_2 2 + \log_2 3\right) = 3$

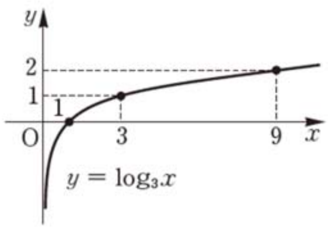
練習 11

(1) (左辺) $= \log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a} =$ (右辺)

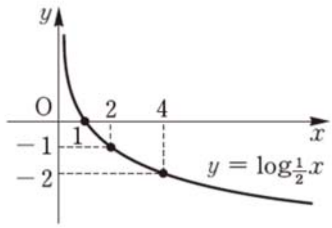
(2) (左辺) $= \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = 1 =$ (右辺)

練習 11

(1)



(2)



練習 13

(1) $\log_3 \sqrt{7}$,　$1 = \log_3 3 = \log_3 \sqrt{9}$,　$3\log_3 \sqrt{2} = \log_3\left(\sqrt{2}\right)^3 = \log_3 \sqrt{8}$

底 2 は 1 より大きく, $\sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$ なので

$\log_3 \sqrt{7} < \log_3 \sqrt{8} < \log_3 \sqrt{9}$

$\log_3 \sqrt{7} < 3\log_3 \sqrt{2} < 1$

⑵ $3\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^3 = \log_{\frac{1}{2}} 27,\quad 2\log_{\frac{1}{2}} 5 = \log_{\frac{1}{2}} 5^2 = \log_{\frac{1}{2}} 25,$

$\frac{5}{2}\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 4^{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 2^5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$

底 $\frac{1}{2}$ は 1より小さく, $25 < 27 < 32$ なので

$\log_{\frac{1}{2}} 32 < \log_{\frac{1}{2}} 27 < \log_{\frac{1}{2}} 25$

$\frac{5}{2}\log_{\frac{1}{2}} 4 < 3\log_{\frac{1}{2}} 3 < 2\log_{\frac{1}{2}} 5$

練習 14

⑴ $\log_2(x+1) = 2$

真数条件より $x+1>0 \quad \therefore x > -1$

$\log_2(x+1) = 2\log_2 2$

$\log_2(x+1) = \log_2 2^2$

$(x+1) = 2^2$

$x = 3$

真数条件を満たすので $x = 3$

⑵ $\log_4(x-3) = \frac{1}{2}$

真数条件より $x-3>0 \quad \therefore x>3$

$\log_4(x-3) = \frac{1}{2}\log_4 4$

$\log_4(x-3) = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$

$x-3 = 2$

$x = 2+3 = 5$

真数条件を満たすので $x = 5$

⑶ $\log_2(x-2) = -1$

真数条件より $x-2>0 \quad \therefore x>2$

$\log_3(x-2) = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$

$x-2 = \frac{1}{3}$

$x = \frac{7}{3}$

真数条件を満たすので $x = \frac{7}{3}$

練習 15

(1) $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$

真数条件より　$x > 0$ かつ $x+1 > 0$　$\therefore x > 0$

$\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$

$\log_2 x(x+1) = \log_2 2$

$x(x+1) = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2,\ 1$

真数条件より　$x = 1$

(2) $\log_2 x = 2 - \log_2(x-3)$

真数条件より　$x > 0$ かつ $x-3 > 0$　$\therefore x > 3$

$\log_2 x = 2 - \log_2(x-3)$

$\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$

$\log_2 x(x-3) = \log_2 2^2$

$x(x-3) = 2^2$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ 4$

真数条件より　$x = 4$

練習 16

(1) $\log_2 x > 3$

真数条件より $x > 0$

$\log_2 x > \log_2 2^3$

底 2 は 1 より大きいので

$x > 2^3$　$\therefore x > 8$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$

真数条件より $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$　$\therefore x > \frac{1}{16}$

練習 17

(1) $\log_3 x + \log_3(x-2) > 1$

真数条件より　$x > 0$ かつ $x-2 > 0$

$\log_3 x(x-2) > \log_3 3$

底 3 は 1 より大きいので

$x(x-2) > 3$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$(x-2)(x+1) > 0$

$\therefore\ x < -1,\ x > 3$

真数条件より　$x > 3$

(2) $\log_3(x+5) + \log_3(x-3) < 2$

真数条件より $x+5 > 0$ かつ $x-3 > 0$　$\therefore x > 0$

$\log_3(x+5)(x-3) < \log_3 3^2 = \log_3 9$

底 3 は 1 より大きいので

$(x+5)(x-3) < 3^9$

$x^2 + 2x - 24 < 0$

$(x-4)(x+6) < 0$

$-6 < x < 4$

真数条件より $3 < x < 4$

(3) $2\log_2(x+1) \leqq 2+\log_2(x+4)$

真数条件より $x+1>0$ かつ $x+4>0$

$\therefore x>-1$

$2\log_2(x+1) \leqq 2+\log_2(x+4)$

$\log_2(x+1)^2 \leqq \log_2 4+\log_2(x+4)$

$\log_2(x+1)^2 \leqq \log_2 4(x+4)$

底 2 は 1 より大きいので

$(x+1)^2 \leqq 4(x+4)$

$x^2-2x-15 \leqq 0$

$(x-5)(x+3) \leqq 0$

$-3 \leqq x \leqq 5$

真数条件より $-1<x\leqq 5$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x-1$

真数条件より $3-x>0$ かつ $x>0$

$\therefore 0<x<3$

$2\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>\log_{\frac{1}{2}} x-2$

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2>\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2>\log_{\frac{1}{2}} 4x$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$(3-x)^2<4x$

$9-6x+x^2<4x$

$x^2-10x+9<0$

$(x-1)(x-9)<0$

$1<x<9$

真数条件より $1<x<3$

練習 18

(1) $\log_{10} 59 = \log_{10} 5.90\times 10 = \log_{10} 5.90 + \log_{10} 10 = 0.7709+1 = 1.7709$

(2) $\log_{10} 0.123 = \log_{10} 1.23\times\frac{1}{10} = \log_{10} 1.23 + \log_{10}\frac{1}{10} = 0.0899+(-1) = -0.9101$

練習 19

(1) $\log_{10} 54 = \log_{10} 2\times 3^3 = \log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 = 0.3010 + 3\times 0.4771 = 1.7323$

(2) $\log_{10} 0.6 = \log_{10}\frac{2\times 3}{10} = \log_{10} 2+\log_{10} 3-\log_{10} 10 = 0.3010+0.4771-1 = -0.2219$

(3) $\log_{10} 25 = \log_{10}\frac{100}{4} = \log_{10} 100-\log_{10} 4 = 2\log_{10} 10-2\log_{10} 2 = 2\times 1-2\times 0.3010 = 1.3980$

(4) $\log_3 4 = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} = \frac{2\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{2\times 0.3010}{0.4771} = 1.261789981\cdots \fallingdotseq 1.2618$

練習 20

$x = 3^{20}$ とする

$\log_{10} x = \log_{10} 3^{20} = 20 \times \log_{10} 3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$

$9 < \log_{10} x < 10$

$9 \times \log_{10} 10 < \log_{10} x < 10 \times \log_{10} 10$

$\log_{10} 10^9 < \log_{10} x < \log_{10} 10^{10}$

底 10 は 1 より大きいので　　$10^9 < x < 10^{10}$

よって，3^{20} は 10 桁の整数

練習 21

$x = 0.2^{28}$ とする

$\log_{10} x = \log_{10} 0.2^{28}$

$$= 28 \times \log_{10} 0.2 = 28 \times \log_{10} \frac{2}{10} = 28\left(\log_{10} 2 - \log_{10} 10 \right) = 28\left(0.3010 - 1 \right) = -19.572$$

$-20 < \log_{10} x < -1.9$

$\log_{10} 10^{-20} < \log_{10} x < \log_{10} 10^{-19}$

底 10 は 1 より大きいので　　$10^{-20} < x < 10^{-19}$

よって，0.2^{28} は 小数第 20 位にはじめて 0 でない数が現れる

練習 22

はじめの食塩水の濃度を a とする。

1 回ごとにはじめの 80%になるので、x 回後には $a \times 0.8^x$ となる。

$$a \times 0.8^x \leqq a \times 0.1$$

$$0.8^x \leqq 0.1$$

$$\log_{10} 0.8^x \leqq \log_{10} 0.1$$

$$x \log_{10} \frac{8}{10} \leqq \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$x\left(\log_{10} 2^3 - \log_{10} 10 \right) \leqq \log_{10} 10^{-1}$$

$$x\left(3 \times 0.3010 - 1 \right) \leqq -1$$

$$-0.097x \leqq -1$$

$$x \geqq 10.309278\cdots$$

ゆえに 11 回後にはじめてはじめの 10%以下になる。

節末問題

１．

⑴ $\log_3 2-\dfrac{1}{2}\log_3 36=\log_3 2-\log_3\left(6^2\right)^{\frac{1}{2}}=\log_3 2-\log_3 6=\log_3\dfrac{2}{6}=\log_3 3^{-1}=-1$

⑵ $\log_{10}\dfrac{1}{4}+2\log_{10}\dfrac{3}{5}-\log_{10}9=\log_{10}\dfrac{1}{4}+\log_{10}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\log_{10}9$

$$=\log_{10}\frac{\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2}{9}=\log_{10}\frac{1}{100}=\log_{10}10^{-2}=-2$$

⑶ $\dfrac{1}{2}\log_2 3+3\log_2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\log_2\sqrt[3]{6}=\log_2 3^{\frac{1}{2}}+\log_2\left(\sqrt{2}\right)^3-\log_2\left(\sqrt[3]{6}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$=\log_2\frac{3^{\frac{1}{2}}\times\left(\sqrt{2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{6}\right)^{\frac{3}{2}}}=\log_2\frac{3^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}}{\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}=\log_2\frac{3^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}}{(2\times 3)^{\frac{1}{2}}}=\log_2 2=1$$

⑷ $\dfrac{\log_5 27}{\log_5\sqrt{3}}=\dfrac{\log_5 3^3}{\log_5 3^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{3\log_5 3}{\frac{1}{2}\log_5 3}=\dfrac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)}=6$

２．

⑴ $b=\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 5}{a}\quad\therefore\ \log_2 5=ab$

⑵ $\log_3 10=\dfrac{\log_2 10}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{1+ab}{a}$

⑶ $\log_{10}36=\dfrac{\log_2 36}{\log_2 10}=\dfrac{\log_2 4+\log_2 9}{\log_2 2+\log_2 5}=\dfrac{2+2a}{1+ab}$

３．

対数の定義より　$M=a\log_a M$　であるから

⑴ $10^{2\log_{10}3}=10^{\log_{10}9}=9$

⑵ $10^{1-\log_{10}5}=10^{\log_{10}\frac{10}{5}}=10^{\log_{10}2}=2$

⑶ $a^{2\log_a x}=a^{\log_a x^2}=x^2$

別解　⑴　$p=10^{2\log_{10}3}$ とおき，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}p=\log_{10}10^{2\log_{10}3}=2\log_{10}3,\ \log_{10}10=\log_{10}9$

⑵　$p=10^{1-\log_{10}5}$ とおき，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}p=\log_{10}10^{1-\log_{10}5}=\log_{10}10^{\log_{10}2}=\log_{10}2\log_{10}10=\log_{10}2\qquad\therefore\ p=2$

⑶　$p=a^{2\log_a x}$ とおき，両辺の a を底とする対数をとると

$\log_a p=\log a^{2\log_a}x=2\log_a x\log_a a=\log_a x^2\qquad\therefore\ p=x^2$

4． $2^x = 3^y = 6^{\frac{3}{2}}$ の各辺 6 を底とする対数をとる。

$$\log_6 2^x = \log_6 3^y = \log_6 6^{\frac{3}{2}}$$

$$x\log_6 2 = y\log_6 3 = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\log_6 2},\ y = \frac{3}{2\log_6 3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2\log_6 2}{3} + \frac{2\log_6 3}{3} = \frac{2\log_6 6}{3} = \frac{2}{3}$$

5．

$y = f(x)$ とする

$y = 2^x + 1$

x と y を入れかえる

$x = 2^y + 1$

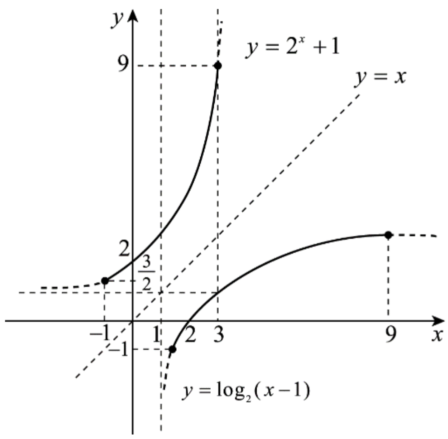
$x - 1 = 2^y$

$\therefore\ y = f^{-1}(x) = \log_2(x-1)$

元の関数の定義域は $-1 \leqq x \leqq 3$ で

値域は $\frac{3}{2} \leqq y \leqq 9$ だから　の $f^{-1}(x)$ の

定義域は $\frac{3}{2} \leqq x \leqq 9$，値域は $-1 \leqq y \leqq$ ●



6．

⑴ $\log_3(x^2+2) = 3$

真数条件より　$x^2 + 2 > 0$

$\therefore$すべての実数

$x^2 + 2 = 3^3$

$x^2 + 2 = 27$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$　（真数条件を満たす）

⑵ $\log_3(x+5) + 1 = 2\log_3(1-x)$

真数条件より　$x + 5 > 0$ かつ $1 - x > 0$

$-5 < x < 1$

$\log_3(x+5) + \log_3 3 = \log_3(1-x)^2$

$\log_3 3(x+5) = \log_3(1-x)^2$

$3(x+5) = (1-x)^2$

$3x + 15 = 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$(x-7)(x+2) = 0$　$\therefore x = -2,\ 7$

真数条件より　$x = -2$

⑶　$2\log_5(x-2) \leqq \log_5(x+4)$

真数条件より　$x-2>0$ かつ $x+4>0$

$\therefore x>2$

$\log_5(x-2)^2 \leqq \log_5(x+4)$

底 5 は 1 より大きいので

$(x-2)^2 \leqq x+4$

$x^2-4x+4 \leqq x+4$

$x^2-5x \leqq 0$

$x(x-5) \leqq 0 \quad \therefore 0 \leqq x \leqq 5$

真数条件より $2<x \leqq 5$

⑷　$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geqq \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(8-x)$

真数条件より $x-2>0$ かつ $8-x>0$

$\therefore 2<x<8$

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \geqq \log_{\frac{1}{3}}(8-x)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2 \geqq \log_{\frac{1}{3}}(8-x)$

底 $\frac{1}{3}$ は1より小さいので

$(x-2)^2 \leqq 8-x$

$x^2-4x+4 \leqq 8-x$

$x^2-3x-4 \leqq 0$

$(x-4)(x+3) \leqq 0$

$\therefore -3 \leqq x \leqq 4$

真数条件より $2<x \leqq 4$

7．

$x=1.28^{10000}$　とする。

$$\log_{10} x = \log_{10} 1.28^{10000} = 10000\times\log_{10} 1.28 = 10000\times\log_{10} 128\times\frac{1}{100}$$

$$= 10000\times\log_{10} 2^7\times 10^{-2} = 10000(7\log_{10} 2-2)$$

$$= 10000(7\times 0.30103-2) = 1072.1$$

$1072 < \log_{10} x < 1073$

よって 1.28^{10000} は 1073 桁の数

8．

はじめの光度を a とする。

1 枚通るごとに光度が 96%になるので

x 枚通ると　$a(0.96)^x$

$$a(0.96)^x \leqq a\times\frac{1}{2}$$

$$(0.96)^x \leqq \frac{1}{2}$$

$$\log_{10}(0.96)^x \leqq \log_{10}\frac{1}{2}$$

$$x\log_{10}\frac{2^5\times 3}{100} \leqq \log_{10} 2^{-1}$$

$$a(5\times\log_{10} 2+\log_{10} 3-2\log_{10} 10) \leqq -\log_{10} 2$$

$$x(5\times 0.3010+0.4771-2) \leqq -0.3010$$

$$-0.0179x \leqq -0.3010$$

$$x \geqq 16.8156\cdots$$

よって　17 枚以上