６章　三角関数　解答

１節　三角比

練習１

⑴　三平方の定理より

$\mathrm{AB}^2 = 4^2 - 3^2 = 25$

$\mathrm{AB} > 0$ より $\mathrm{AB} = 5$

$\sin A = \dfrac{3}{5},\ \cos A = \dfrac{4}{5},\ \tan A = \dfrac{3}{4}$

⑵　三平方の定理より

$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 6^2 = 40$

$\mathrm{AB} > 0$ より $\mathrm{AB} = 2\sqrt{16}$

$\sin A = \dfrac{2}{2\sqrt{10}} \dfrac{\sqrt{10}}{10},\ \cos A = \dfrac{6}{2\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10},\ \tan A = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

⑶　$\mathrm{AC}^2 = 17^2 - 15^2 = 64$

$\mathrm{AC} > 0$ より $\mathrm{BC} = 8$

$\sin A = \dfrac{15}{17},\ \cos A = \dfrac{8}{17},\ \tan A = \dfrac{15}{8}$

練習２

$\tan 22^\circ = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$ より　$\mathrm{AC} = \tan 22^\circ \times \mathrm{BC} = 0.4040 \times 25 = 10.1000 \fallingdotseq 10.1$

求めるビルの高さAEは　$\mathrm{AE} = \mathrm{AC} + \mathrm{CE} = 10.1 + 1.6 = 11.7$　　$\therefore$ 11.7 m

練習３

鉛直方向：AC

$\sin 12^\circ = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ より　$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \times \sin 12^\circ = 100 \times 0.2079 = 20.79 \fallingdotseq 20.8$　$\therefore$ 20.8 m

水平方向：BC

$\cos 12^\circ = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ より　$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \cos 12^\circ = 100 \times 0.9781 = 97.81$　$\therefore$ 97.8 m

練習４

⑴　$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$

⑵　$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$

⑶　$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

練習 5

(1) $\cos(90°-A)\cos A-\sin(90°-A)\sin A=\sin A\cos A-\cos A\sin A=0$

(2) $\dfrac{\cos A}{\sin(90°-A)}+\dfrac{\sin A}{\cos(90°-A)}=\dfrac{\cos A}{\cos A}+\dfrac{\sin A}{\sin A}=1+1=2$

(3) $\cos A-\dfrac{1}{\tan(90°-A)}=\tan A-\tan A=0$

練習 6

(1) $r=\sqrt{2}$, $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ より

$\sin 135°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135°=\dfrac{1}{-1}=-1$

(2) $r=2$, $\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$ より

$\sin 150°=\dfrac{1}{2}$, $\cos 150°=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150°=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

練習 7

(1) $\sin 108°=\sin(180°-72°)=\sin 72°$

(2) $\cos 162°=\cos(180°-18°)=-\cos 18°$

(3) $\tan 130°=\tan(180°-50°)=-\tan 50°$

練習 8

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

練習 9

θ	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

練習 10

(1) $(\text{左辺}) = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

$= \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$

$= \sin\theta\sin^2\theta$

$= \sin^3\theta$

$= (\text{右辺})$

よって, 左辺 = 右辺が成り立つ

(2) $(\text{左辺}) = \tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = (\text{右辺})$

よって, 左辺 = 右辺が成り立つ

練習 11

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$

$\sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\tan\theta = -\dfrac{1}{2}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$

$\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

練習 12

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}$

$\cos^2\theta = \dfrac{16}{25}$

$\cos\theta = \pm\dfrac{4}{5}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ かつ $\tan\theta = -\dfrac{3}{4}$ より $\cos\theta < 0$ $\quad \therefore \cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -\dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$

練習 13

⑴ 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$a=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin A=\frac{8}{\sin 60^\circ}\cdot\sin 45^\circ=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

また $2R=\dfrac{b}{\sin B}$ より

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sin B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

⑵ 三角形の内角の和は 180° より $C=180^\circ-\left(30^\circ+15^\circ\right)=135^\circ$

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ より

$$c=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{4}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ=\frac{4}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

また $2R=\dfrac{a}{\sin A}$ より

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\frac{1}{2}}=4$$

⑶ 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ より

$$\frac{a}{\sin 120^\circ}=2\cdot 3 \quad \therefore a=3\sqrt{3}$$

$b=c$ だから $B=C=60^\circ$

$\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=2\cdot 3$ より $b=3\left(=c\right)$ $\quad\therefore\ a=3\sqrt{3},\ b=c=3$

練習 14

⑴ 三角形の内角の和が 180° なので $\angle\mathrm{AHB}=180^\circ-\left(60^\circ+75^\circ\right)=45^\circ$

⑵ 正弦定理より $\dfrac{\mathrm{HB}}{\sin\angle\mathrm{HAB}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AHB}}$

$$\mathrm{HB}=\frac{100}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{100}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{6}$$

⑶ $\tan\angle\mathrm{PBH}=\dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{HB}}$ より

$$\mathrm{PH}=\mathrm{HB}\times\tan\angle\mathrm{PBH}=50\sqrt{6}\tan 60^\circ=50\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=150\sqrt{2}$$

練習 15

⑴　余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 25 - 24 \times \frac{1}{2} = 13$$

$c > 0$ より $c = \sqrt{13}$

⑵　余弦定理より

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \times \cos B = \sqrt{3}^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 19 - 8\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 19 + 12 = 31$$

$b > 0$ より $b = \sqrt{31}$

練習 16

⑴　余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ より $C = 120^\circ$

⑵　余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(\sqrt{2} + 1 \right)^2 + \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2}{2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1 \right) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1 \right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 45^\circ$

練習 17

⑴　余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2$ のとき

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \quad \therefore\ A = 90^\circ$$

⑵　最大角は最大辺の対角である$\angle A$であるから

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{-8}{40} = -\frac{1}{5} < 0$$

よって，$90^\circ < A < 180^\circ$ だから鈍角三角形である。

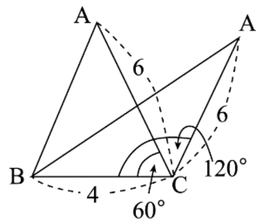
練習 18

⑴　$S = \frac{1}{2}bc\sin A$ より $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

⑵　$S = \frac{1}{2}ca\sin B$ より $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2}\sin 135^\circ = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$

練習 19

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \sin C=6\sqrt{3}$$



$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$0<C<180°$ より $C=60°,\ 120°$

$C=60°$ のとき

$C^2=4^2+6^2=2\cdot 4\cdot 6\cos 60°=28$

$C>0$ より $C=2\sqrt{7}$

$C=120°$ のとき

$C^2=4^2+6^2=2\cdot 4\cdot 6\cos 120°=76$

$C>0$ より $C=2\sqrt{19}$

練習 20

⑴　余弦定理より　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{5}{7}$

⑵　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$

$\sin A>0$ より $\sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ より $S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$

節末問題

１．

⑴　$\angle \mathrm{BAD} = 15°$　より　$\triangle \mathrm{ABD}$　は　$\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$　の二等辺三角形である。

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BA} = \mathrm{AC} \times \frac{1}{\sin 30°} = 1 \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

⑵　$$\tan 15° = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DB} + \mathrm{BC}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1 \times \left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2-\sqrt{3}$$

２．

$\angle \mathrm{PBH} = 45°$ より $\mathrm{PH} = \mathrm{BH} = x$ とする

$\tan \angle \mathrm{PAH} = \dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{AH}}$ より　$\tan 30° = \dfrac{x}{4+x}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{4+x}$$

$$4+x = \sqrt{3}x$$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)x = -4$$

$$x = \frac{-4}{1-\sqrt{3}} = \frac{-4\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{-4\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3} = 2\left(1+\sqrt{3}\right)$$

よって塔の高さは

$$1.5+2\left(1+\sqrt{3}\right) = 1.5+2+2\sqrt{3} = 3.5+2\times1.73 = 3.5+3.46 = 6.96$$

よって　7.0 m

３．

⑴　余弦定理より

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{3^2+4^2-2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

⑵　余弦定理より

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{C}^2 + \mathrm{BM}^2 - 2 \cdot c \cdot \mathrm{BM} \cos B = 3^2+2^2-2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{5}{2}$$

$\mathrm{AM} > 0$　より　$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

４．

⑴　$\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}bc \times \sin A$　より　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

⑵　$\triangle \mathrm{ABD}$の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot \mathrm{AD}\sin 30^\circ = 4\cdot \mathrm{AD}\cdot \dfrac{1}{2} = 2\mathrm{AD}$

$\triangle \mathrm{ACD}$の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot 3\sin 30^\circ = \dfrac{3}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}\mathrm{AD}$

面積について $\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ACD}$ より

$6\sqrt{3} = 2\mathrm{AD}\cdot \dfrac{3}{4}\mathrm{AD}$

$6\sqrt{3} = \dfrac{11}{4}\mathrm{AD}$　　$\therefore \mathrm{AD} = \dfrac{24\sqrt{3}}{11}$

5．

⑴　点 D を通り AB と平行な直線をひくとき，辺 BC との交点を P とする。

このとき　$\mathrm{PD}=6,\ \mathrm{PC}=5$　より　$\cos\theta = \dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{1}{5}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 1$　より　$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{24}{25}$

$\sin\theta > 0$　より　$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

⑵　余弦定理より

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\cos\theta = 6^2 + 15^2 - 2\cdot 6\cdot 15\cdot \dfrac{1}{5} = 225$

$\mathrm{AC} > 0$　より　$\mathrm{AC} = 15$

⑶　平行四辺形 ABPD の面積$=2\triangle \mathrm{ABP}$ の面積$=2\cdot \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\sin\theta = 24\sqrt{6}$　①

$\triangle \mathrm{DPC}$ の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin\theta = 15\cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$　②

台形 ABCD の面積は ①+② より $30\sqrt{6}$

6．

⑴　余弦定理より

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot \mathrm{BC}\times\cos 60^\circ = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \dfrac{1}{2} = 49$

$\mathrm{AC} > 0$ より　$\mathrm{AC} = 7$

⑵　円に内接する四角形の対角の和は 180°　であることから $\angle \mathrm{ADC} = 120^\circ$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\angle \mathrm{ACD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle \mathrm{ADC}}$$

$$\mathrm{AD} = \frac{7}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$$

７．

⑴　$\mathrm{OM}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CM}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OC}=2$ だから

△OMC に余弦定理を適用すると

$$\cos\theta=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

⑵　$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}$ より $\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta$

ここで，$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \mathrm{OH}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

演習

例題８　$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とすると

$a=4,\ b=5,\ c=6$ より $s=\dfrac{1}{2}(4+5+6)=\dfrac{15}{2}$

ヘロンの公式より

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

練習 19

$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とすると $a=5,\ b=6,\ c=7$ より

$s=\dfrac{1}{2}(5+6+7)=9$

ヘロンの公式より

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$$