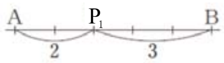
７章　図形と方程式　解答

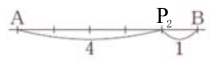
１節　座標平面上の点と直線

練習１

線分 AB 内の点のうち，A までが 2，B までが 3，の点なので

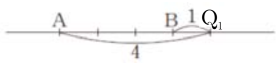


線分 AB 内の点のうち，A までが 4，B までが 1，の点なので



練習２

線分 AB 外の点のうち，A までが 4，B までが 1，の点なので



線分 AB 外の点のうち，A までが 2，B までが 5，の点なので

練習３

(1) $\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

(2) $\dfrac{3\times(-3)+5\times1}{5+3}=\dfrac{-9+5}{8}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{-5\times(-3)+3\times1}{3-5}=\dfrac{15+3}{-2}=-9$

練習４

(1) $\left(\dfrac{5+(-1)}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)=(2,\ 3)$

(2) $\left(\dfrac{1\times5+2\times(-1)}{2+1},\ \dfrac{1\times2+2\times4}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{3}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)=\left(1,\ \dfrac{10}{3}\right)$

(3) $\left(\dfrac{-1\times5+2\times(-1)}{2-1},\ \dfrac{-1\times2+2\times4}{2-1}\right)$

$=(-5-2,\ -2+8)=(-7,\ 6)$

(4) $\left(\dfrac{-3\times5+1\times(-1)}{1-3},\ \dfrac{-3\times2+1\times4}{1-3}\right)$

$=\left(\dfrac{-16}{-2},\ \dfrac{-2}{-2}\right)=(8,\ 1)$

練習５

$$\left(\frac{3+(-2)+5}{3},\ \frac{7+3+(-1)}{3}\right)=\left(\frac{6}{3},\ \frac{9}{3}\right)=(2,\ 3)$$

練習６

⑴ $\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$

⑵ $\sqrt{(5-2)^2+(1-7)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{9(1+4)}=3\sqrt{5}$

⑶ $\sqrt{\{7-(-5)\}^2+(-3-2)^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

⑷ $\sqrt{(3-3)^2+\{2-(-4)\}^2}=\sqrt{6^2}=6$

練習７

A$(1,\ -1)$，B$(4,\ 2)$，P$(0,\ y)$　に対し

$\mathrm{PA}^2=(0-1)^2+(y+1)^2=1+y^2+2y+1$

$\quad=y^2+2y+2$

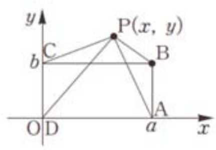
$\mathrm{PB}^2=(0+4)^2+(y-2)^2=16+y^2-4y+4$

$\quad=y^2-4y+20$

PA ＝PB より　$y^2+2y+2=y^2-4y+20$

よって　$6y=18$　$y=3$　　P は$(0,\ 3)$

練習８



A$(a,\ 0)$，B$(a,\ b)$，C$(0,\ b)$，D$(0,\ 0)$，P$(x,\ y)$　に対し

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2=\{(x-a)^2+y^2\}+\{x^2+(y-b)^2\}$　①

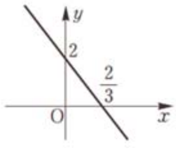
$\mathrm{PB}^2+\mathrm{PD}^2=\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+x^2+y^2$　②

①，②より，与式は成立する。

練習９

⑴ $3x+y-2=0$　において　$x=0$　のとき　$y=2$

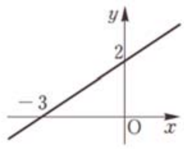
$y=0$　のとき　$3x=2$　よって　$x=\dfrac{2}{3}$



⑵　$2x-3y+6=0$　において

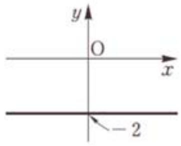
$x=0$　のとき　$y=2$

$y=0$　のとき　$2x=-6$　よって　$x=-3$



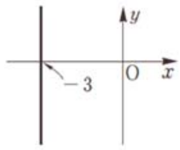
⑶　x が何であっても　$y+2=0$

つまり　$y=-2$



⑷　y が何であっても $3x+9=0$

つまり　$x=-3$



練習 10

⑴　$y-2=3\{x-(-1)\}$　なので

$y=3x+3+2$　よって　$y=3x+5$

⑵　$y-3=-2(x-4)$　なので

$y=-2x+8+3$　よって　$y=-2x+11$

⑶　y 軸に平行なので　$x=k$　とかけるが

$(3,\ -2)$を通るので　$x=3$

⑷　x 軸に平行なので　$y=l$　とかけるが

$(3,\ -2)$を通るので　$y=-2$

練習 11

⑴　$y-1=\dfrac{4-1}{6-3}(x-3)$　なので

$y=\dfrac{3}{3}(x-3)+1$　よって　$y=x-3+1$

つまり　$y=x-2$

⑵　$y-2=\dfrac{-4-2}{3-1}(x-1)$　なので

$y=\dfrac{-6}{2}(x-1)+2$　よって　$y=-3x+3+2$

したがって　$y=-3x+5$

⑶　2 点の x 座標が 5 なので　$x=5$

⑷　2 点の y 座標が 7 なので　$y=7$

練習 12

$y-0=\dfrac{b-0}{0-a}(x-a)$ なので　$y=-\dfrac{b}{a}(x-a)$

よって　$\dfrac{y}{b}=-\dfrac{1}{a}(x-a)$　　したがって　$\dfrac{y}{b}=-\dfrac{x}{a}+1$

つまり　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

練習 13　平行なのは①と⑤，垂直なのは②と④

① は　$y=-3x+4$

② は　$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{2}$

③ は　$y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

④ は　$y=-2x+\dfrac{1}{4}$

⑤ は　$y=-3x+\dfrac{3}{2}$

⑥ は　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{8}$

したがって　①と⑤は傾きが-3なので平行。

②と④は傾き同士をかけて$\dfrac{1}{2}\times(-2)=-1$なので垂直。

練習 14

$3x-y+5=0$ は　$3x+5=y$　　つまり　$y=3x+5$

よって　これに平行な直線をア

垂直な直線をイ　とする。

(ⅰ) アは傾き 3 で $(-3,\ 4)$ を通るので　$y-4=3(x-(-3))$

よって　$y=3x+9+4$　　つまり　$y=3x+13$

(ⅱ) イの傾き m は $m\cdot 3=-1$ より　$m=-\dfrac{1}{3}$　　また イは $(-3,\ 4)$ を通る。

よって　$y-4=-\dfrac{1}{3}(x-(-3))$

$y=-\dfrac{1}{3}x-1+4$　　　$y=-\dfrac{1}{3}x+3$

練習 15

AB の傾きは　$\dfrac{4-2}{5-(-1)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

したがって　垂直二等分線の傾きm は　$m\cdot\dfrac{1}{3}=-1$　より　$m=-3$

また AB の中点は$\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)=(2,\ 3)$

したがって　垂直二等分線は　$y-3=-3(x-2)$

$y=-3x+6+3$　　よって　$y=-3x+9$

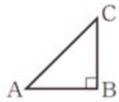
節末問題

１．

$$AB^2=(1+1)^2+(5-1)^2=2^2+4^2=4+16=20$$

$$BC^2=(-1-3)^2+(1+1)^2=4^2+2^2=4+16=20$$

$$CA^2=(1-3)^2+(5+1)^2=2^2+6^2=4+36=40$$



よって，$AB^2+BC^2=CA^2$

したがって，$\triangle ABC$ は　$AB=BC$　で

$\angle B=90°$ の直角二等辺三角形

２．

点 P は $y=2x$ 上にあるので $(a,\ 2a)$ とおける。

$PA^2=(a-3)^2+(2a-0)^2=a^2-6a+9+4a^2$ …①

$PB^2=(a+2)^2+(2a-5)^2=a^2+4a+4+4a^2-20a+25$ …②

PA $=$ PBより　①＝②となるので

$$-6a+9=4a+4-20a+25$$

よって　$10a=20$

したがって　$a=2$　　つまりPは $(2,\ 4)$

３．

⑴　ABを $3:1$ に内分する点は

$\left(\dfrac{1\times x+3\times 5}{3+1},\ \dfrac{1\times 2+3\times y}{3+1}\right)=\left(\dfrac{x+15}{4},\ \dfrac{2+3y}{4}\right)$　これが $(3,\ -1)$ なので

$\dfrac{x+15}{4}=3,\ \dfrac{2+3y}{4}=-1$　よって　$x+15=12,\ 2+3y=-4$

したがって　$x=-3,\ 3y=-6$　　つまり　$x=-3,\ y=-2$

⑵ ABを $1:4$ に外分する点は

$\left(\dfrac{-4\times x+1\times 5}{1-4},\ \dfrac{-4\times 2+1\times y}{1-4}\right)=\left(\dfrac{-4x+5}{-3},\ \dfrac{y-8}{-3}\right)$　これが $(-3,\ 5)$ なので

$\dfrac{-4x+5}{-3}=-3,\ \dfrac{y-8}{-3}=5$　よって　$-4x+5=9,\ y-8=-15$

したがって　$-4x=4,\ y=-7$　　つまり　$x=-1,\ y=-7$

４．

⑴　ACの中点は $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{4-6}{2}\right)=(2,\ -1)$

よって　Mは $(2,\ -1)$

⑵　Dを$(x,\ y)$とおくと　BDの中点は$\left(\dfrac{-2+x}{2},\ \dfrac{1+y}{2}\right)$

これがMと一致するので　$\dfrac{-2+x}{2}=2,\ \dfrac{1+y}{2}=-1$

よって$-2+x=4,\ 1+y=-2$

したがって　$x=6,\ y=-3$　　つまり　Dは$(6,\ -3)$

5．

頂点Cを$(x,\ y)$とおくと△ABCの重心は

$\left(\dfrac{8-2+x}{3},\ \dfrac{5+1+y}{3}\right)=\left(\dfrac{6+x}{3},\ \dfrac{6+y}{3}\right)$であり

これが　G$(3,\ 1)$なので　$\dfrac{6+x}{3}=3,\ \dfrac{6+y}{3}=1$

よって　$6+x=9,\ 6+y=3$

したがって　$x=3,\ y=-3$　　つまり　Cは$(3,\ -3)$

6．

直線ABは　$y+2=\dfrac{-2-10}{6-2}(x-6)$

$y+2=\dfrac{-12}{4}(x-6)$　$y+2=-3(x-6)$

$y=-3x+18-2$　　$y=-3x+16$

これが　C$(a,\ a+4)$を通るので　$a+4=-3a+16$

$4a=12$　　よって　$a=3$

7．

$3x+2y+1=0$は　$2y=-3x-1$　　つまり　$y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

これに平行な直線を　①

垂直な直線を　②とする。

(i)　①は傾き$-\dfrac{3}{2}$で$(2,\ -1)$を通るので　$y+1=-\dfrac{3}{2}(x-2)$

よって　$y=-\dfrac{3}{2}x+3-1$　したがって　平行な直線$y=-\dfrac{3}{2}x+2$

(ii)　②の傾きをmとすると$-\dfrac{3}{2}\cdot m=-1$　より　$m=\dfrac{2}{3}$

また②は$(2,\ -1)$を通る。　よって　$y+1=\dfrac{2}{3}(x-2)$

$y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}-1$　つまり　垂直な直線$y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3}$

８．

直線 $3x-2y-12=0$　は

$3x-12=2y$

$y=\frac{3}{2}x-6$ なので　傾きは $\frac{3}{2}$

一方　直線 PQ の傾きは，Q を $(a,\ b)$ とすると

$\frac{b-5}{a-3}$　である。

二つの直線は垂直なので

$\frac{b-5}{a-3}\cdot\frac{3}{2}=-1$　　よって $(b-5)\cdot 3=-1\cdot(a-3)\cdot 2$

したがって　$3b-15=-2a+6$　　つまり $2a+3b=21\cdots$①

一方　PQ の中点は $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+5}{2}\right)$ であり

これが $3x-2y-12=0$ 上にあるので

$3\cdot\frac{a+3}{2}-2\cdot\frac{b+5}{2}=12$

よって　$3(a+3)-2(b+5)=24$　　$3a+9-2b-10=24$

$3a-2b=25\cdots$②

①×3−②×2 より

$$\begin{array}{rl} & 6a+9b=63 \\ -) & 6a-4b=50 \\ \hline & 13b=13 \end{array}$$

よって　$b=1$

①に代入して　$2a+3=21$　$2a=18$　$a=9$

よって，Q$(9,\ 1)$