７章　図形と方程式　解答

２節　２次曲線

練習１

⑴　$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$　　よって　$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

⑵　$(x-3)^2+(y+1)^2=x^2$ とおくと$(5,\ 1)$を通ることより

$(5-3)^2+(1+1)^2=x^2$

$4+4=x^2$

つまり　$x^2=8$　　よって　$(x-3)^2+(y+1)^2=8$

⑶　中心は$(2,\ 3)$，$(0,\ -5)$の中点なので　$\left(\dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{3-5}{2}\right)=(1,\ -1)$

これと$(0,\ -5)$との距離が半径であるから

$r^2=(1-0)^2+(-1+5)^2=17$

よって　$(x-1)^2+(y+1)^2=17$

練習２

⑴　$x^2-2x+y^2+6y=-1$

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9=-1$

よって　$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

これは　点$(1,\ -3)$を中心とし，半径が$3$の円を表す。

⑵　$x^2+4x+y^2-8y+10=0$

$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+10=0$

よって　$(x+2)^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$

これは　点$(-2,\ 4)$を中心とし，半径が$\sqrt{10}$ の円を表す。

練習３

求める円の方程式を　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　とする。

この円が $(-2,\ 5)$，$(1,\ -4)$，$(2,\ 3)$ を通るので

$4+25-2l+5m+n=0$　$1+16+l-4m+n=0$

$4+9+2l+3m+n=0$

$$\therefore \begin{cases} -2l+5m+n=-29 & \cdots① \\ l-4m+n=-17 & \cdots② \\ 2l+3m+n=-13 & \cdots③ \end{cases}$$

①－②より　$-3l+9m=-12$

$\therefore\ l-3m=4\ \cdots④$

②－③より　$-l-7m=-4$

$\therefore\ l+7m=4\ \cdots⑤$

④，⑤を解いて

$l=4,\ m=0$

③に代入して　$n=-21$

よって，求める円の方程式は

$x^2+y^2+4x-21=0$

$(x+2)^2+y^2=25$　と変形できるので

△ABC の外心は $(-2,\ 0)$

練習４

P を $(x,\ y)$ とおくと $3\mathrm{PB}=\mathrm{PA}$ より

$3\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$

よって　$9(x^2-12x+36+y^2)=x^2+4x+4+y^2$

したがって　$8x^2-112x+320+8y^2=0$

$x^2+y^2-14x+40=0$　つまり　$(x-7)^2-49+y^2+40=0$

よって　$(x-7)^2+y^2=9$　即ち　中心 $(7,\ 0)$ で半径 3 の円。

練習５

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線方程式は $x_1+y_1=r^2$ なので

⑴は $3x+4y=25$

⑵は $-x+2y=5$

⑶は $0x+3y=9$　よって　$y=3$

⑷は $-4x+0y=16$　よって　$x=-4$

練習６

$y^2=4px$ は焦点が $(p,\ 0)$, 準線が $x=-p$ なので

⑴ 焦点 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$, 準線 $x=-\frac{1}{4}$ のときは $p=\frac{1}{4}$

よって $y^2=4\cdot\frac{1}{4}x$ つまり $y^2=x$

⑵ 焦点 $(-2,\ 0)$, 準線 $x=2$ のときは $p=-2$

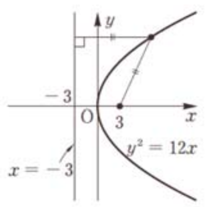
よって $y^2=4\cdot(-2)x$ つまり $y^2=-8x$

練習７

⑴ $y^2=4px$ は焦点が $(p,\ 0)$, 準線が $x=-p$ なので

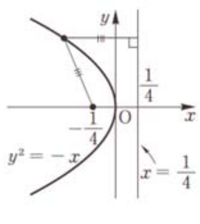
$y^2=12x$ については $4p=12$ より $p=3$

よって 焦点は $(3,\ 0)$ 準線は $x=-3$




⑵ $y^2=-x$ については $4p=-1$ より $p=-\frac{1}{4}$

よって 焦点は $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$ 準線は $x=\frac{1}{4}$




練習８ $x^2=4py$ は焦点が $(0,\ p)$, 準線が $y=-p$ なので

⑴ 焦点 $(0,\ 1)$, 準線 $y=-1$ のときは $p=1$

よって $x^2=4\cdot 1y$ つまり $x^2=4y$

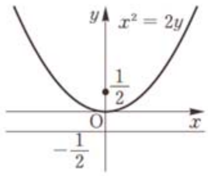
⑵ 焦点 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$, 準線 $y=\frac{1}{4}$ のときは $p=-\frac{1}{4}$

よって $x^2=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)y$ つまり $x^2=-y$

練習９　$x^2=4py$ は焦点が $(0,\ p)$，準線が $y=-p$ なので

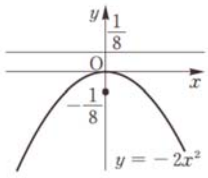
⑴　$x^2=2y$ については　$4p=2$ より　$p=\dfrac{1}{2}$

よって　焦点は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，準線は $y=-\dfrac{1}{2}$




⑵　$y=-2x^2$ については　$x^2=-\dfrac{1}{2}y$ なので　$4p=-\dfrac{1}{2}$ より　$p=-\dfrac{1}{8}$

よって　焦点は $\left(0,\ -\dfrac{1}{8}\right)$，準線は $y=\dfrac{1}{8}$




練習 10

⑴　長軸 AA′ で $A(6,\ 0)$，$A'(-6,\ 0)$

短軸 BB′ で $B(0,\ 3)$，$B'(-0,\ -3)$　だから　$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

⑵　楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおき，2 焦点を F，F′ とおくと

楕円上の点 P に対して　$PF+PF'=2a$　である。

$2a=4$　なので　$a=2$　よって $\sqrt{a^2-b^2}=1$ より

$4-b^2=1$ より　$4-b^2=1$　$b^2=3$　　したがって　答は　$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

練習 11

⑴ $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　より　$a=5,\ b=3$

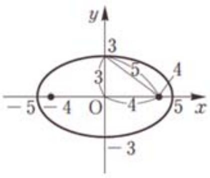
焦点は $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$　$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$

また頂点は　$(5,\ 0),\ (-5,\ 0),$

$(0,\ 3),\ (0,\ -3)$

よって　長軸の長さは $2a=10$

短軸の長さは $2b=6$




⑵ $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　より　$a=4,\ b=2$

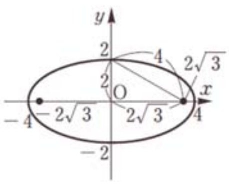
焦点は $\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ より　$(2\sqrt{3},\ 0),\ (-2\sqrt{3},\ 0)$

また頂点は　$(4,\ 0)\ (-4,\ 0),$

$(0,\ 2),\ (0,\ -2)$

よって　長軸の長さは $2a=8$

短軸の長さは $2b=4$




⑶ $x^2+4y^2=4$　より　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　よって　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$

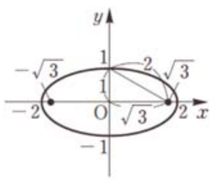
焦点は $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より　$(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0)$

また頂点は　$(2,\ 0),\ (-2,\ 0),$

$(0,\ 1),\ (0,\ -1)$

よって　長軸の長さは $2a=4$

短軸の長さは $2b=2$



練習 12

(1)　$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$　より　$a=4,\ b=5$

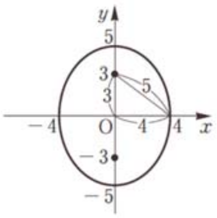
焦点は $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ より　$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

また頂点は　$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$,

$(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$

よって　長軸の長さは $2b=10$

短軸の長さは $2a=8$




(2)

$9x^2+4y^2=36$ は両辺を 36 でわると $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$　よって　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

したがって　$a=2,\ b=3$

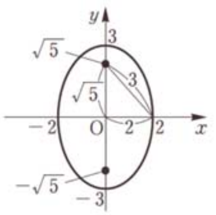
焦点は $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ より　$(0,\ \sqrt{5})$, $(0,\ -\sqrt{5})$

また頂点は　$(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$,

$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

よって　長軸の長さは $3b=6$

短軸の長さは $2a=4$




練習 13

双曲線の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおき，2 焦点を F, F′ とおくと双曲線上の点 P に対して 2 焦点からの距離の差が 2 だから

$2a=4$　より　$a=2,\ \sqrt{a^2+b^2}=6$ より

$4+b^2=36$　$b^2=32$　　したがって　答は　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1,$

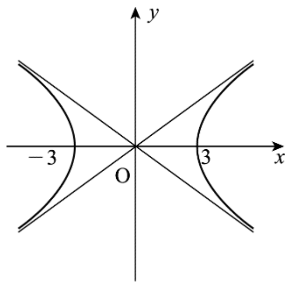
漸近線は　$y=\sqrt{2}x,\ y=-\sqrt{2}x$

練習 14

⑴ $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{7}^2}=1$　なので　$a=3,\ b=\sqrt{7}$

焦点は $\sqrt{3^2+\sqrt{7}^2}=\sqrt{9+7}=4$ より　$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$

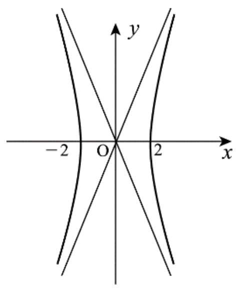
よって　頂点は　$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$, 漸近線は $y=\dfrac{\sqrt{7}}{3}x,\ y=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$




⑵ $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　なので　$a=2,\ b=4$

焦点は $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$ より　$(2\sqrt{5},\ 0)$, $(-2\sqrt{5},\ 0)$

よって　頂点は　$(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, 漸近線は $y=2x,\ y=-2x$

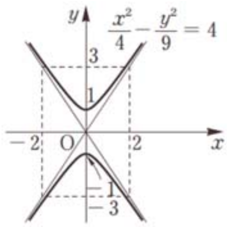



練習 15

⑴ $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$　より　$a=2,\ b=3$

焦点は $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より　$(0,\ \sqrt{13})$, $(0,\ -\sqrt{13})$

よって　頂点は　$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$, 漸近線は　$y=\dfrac{3}{2}x,\ y=-\dfrac{3}{2}x$

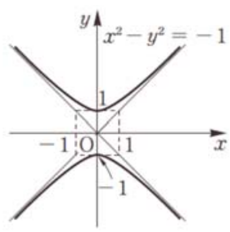



⑵ $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=-1$　なので　$a=1,\ b=1$

焦点は $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ より　$(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$

よって頂点は　$(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$

漸近線は　$y=\dfrac{1}{1}x$　と　$y=-\dfrac{1}{1}x$　つまり　$y=x,\ y=-x$



練習 16

⑴　漸近線が $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ だから

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}$ より $2a=3b$

頂点が $\left(6,\ 0\right)$, $\left(-6,\ 0\right)$ だから

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると

$a=6$ このとき $b=4$

よって，$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=1$

⑵　漸近線が $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ だから

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$ より $a=2b$

頂点が $\left(0,\ 5\right)$, $\left(0,\ -5\right)$ だから

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b}=-1$ とすると $b=5$,

このとき $a=10$

よって，$\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{25}=1$

節末問題

1．

⑴　半径は中心と $y$ 軸の距離なので3　よって答は $(x+3)^2+(y-5)^2=9$

⑵　求める円を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおくと　$(0,\ 5)$，$(-1,\ -2)$，$(6,\ -3)$ を通るから

$$0+25+0l+5m+n=0$$
$$1+4-l-2m+n=0$$
$36+9+6l-3m+n=0$ が成立する。

$$\therefore \begin{cases} 5m+n=25 & \cdots① \\ -l-2m+n=-5 & \cdots② \\ 6l-3m+n=-45 & \cdots③ \end{cases}$$

②×6+③より $-15m+7n=-75\cdots④$

①×3+④より $10n=-150$

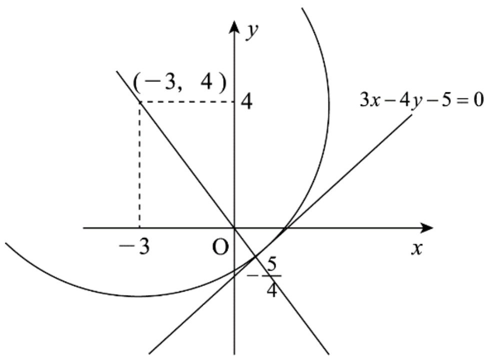
$\therefore\ n=-15$

①に代入して，$m=-2$

$m=-2,\ n=-15$ を②に代入して　$l=-6$

よって，$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑶　$3x-4y-5=0$ より　　$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{4}\cdots①$




点 $(-3,\ 4)$ を通って①に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{4}{3}(x+3)+4$$
$$y=-\frac{4}{3}x\cdots②$$

①と②の交点は

$$\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}=-\frac{4}{3}x$$

を解いて，$x=\dfrac{3}{5}$，②に代入して　$y=-\dfrac{4}{5}$

円の半径を $r$ とすると

$$r^2=\left(\frac{3}{5}+3\right)^2+\left(-\frac{4}{5}-4\right)^2=\left(\frac{9}{25}+\frac{18}{5}+9\right)+\left(\frac{16}{25}+\frac{32}{5}+16\right)$$
$$=1+10+25=36$$

よって，$(x+3)^2+(y-4)^2=36$

（参考）

直線 $ax+by+c=0$ と 点$(x_0,\ y_0)$との距離$h$は

$h=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　という公式を使うと

$\mathrm{CP}=\dfrac{|3\cdot(-3)-4\cdot 4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-9-16-5|}{5}=6$

２．

⑴　$y^2=4px$の焦点は$(p,\ 0)$，準線は$x=-p$であり　今$y^2=6x$であって

$4p=6$　よって　$p=\dfrac{3}{2}$　　したがって　焦点は$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，準線は$x=-\dfrac{3}{2}$

⑵　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$で長軸の長さが$12$ならば$2a=12$　よって　$a=6$

一方の焦点が$(4,\ 0)$なので$4=\sqrt{a^2-b^2}$　$16=36-b^2$　よって　$b^2=20$

したがって　楕円は　$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$

⑶　双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$で頂点は$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$なので　$a^2=4$より　$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$

焦点は　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$より　$(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$

漸近線は　$y=\pm\dfrac{b}{a}x$なので　$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

３．

⑴　放物線$x^2=4py$の準線は$y=-p$で　焦点は$(0,\ p)$であり　頂点は$(0,\ 0)$

よって　頂点が$(1,\ 4)$になるように$x$方向に$1$，$y$方向に$4$平行移動すると

放物線は$(x-1)^2=4p(y-4)$

このとき準線は$y=-p+4$となる　これが$y=3$のとき　$p=1$

よって，$(x-1)^2=4(y-4)$

⑵　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$において　長軸の長さは$2b$，短軸の長さは$2a$なので

仮定より$2b-2a=2$　$b-a=1$　　イ

$c=\sqrt{b^2-a^2}=3$より　$b^2-a^2=9$　イより　$b=a+1$なので　$(a+1)^2-a^2=9$

$a^2+2a+1-a^2=9$　したがって　$a=4$　イより　$b=5$

よって，$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

⑶　漸近線が $y=\pm\frac{3}{2}x$ だから　$\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\cdots$①

$y=\frac{3}{2}x$ に対して　$x=2$ のとき　$y=3$ だから点 $(2,\ 6)$ は漸近線の上側にあるから

双曲線は　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$　の形で表される。

これが $(\ 2,\ 6\ )$ を通るので　$\frac{4}{a^2}-\frac{36}{b^2}=-1$　両辺に $\times b^2$ して　$4\times\frac{b^2}{a^2}-36=-b^2\cdots$②

①を $a=\frac{2}{3}b$ として②に代入　$4\times\frac{9}{4}-36=-b^2$　$\therefore\ b^2=27$

①の両辺を2乗して $b^2=27$ を代入する。

$b^2=\frac{9}{4}a^2,\ 27\times\frac{4}{9}=a^2$　　$\therefore\ a^2=12$

よって，$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{27}=-1$

4．

⑴　$4x^2+16x-9y^2+18y-29=0$ より　$4(\ x^2+4x\ )-9(\ y^2-2y\ )=29$

$4\left\{(\ x+2\ )^2-4\right\}-9\left\{(\ y-1\ )^2-1\right\}=29$

$4(\ x+2\ )^2-16-9(\ y-1\ )^2+9=29$

$4(\ x+2\ )^2-9(\ y-1\ )^2=36$

$\frac{(\ x+2\ )^2}{9}-\frac{(\ y-1\ )^2}{4}=1$　　よって　双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ を

$x$ 軸方向に $-2$，　$y$ 軸方向に $1$　平行移動したもの

⑵　$x^2-2x+4y^2+16y=-13$ より　$x^2-2x+4(\ y^2+4y\ )=-13$

$(\ x-1\ )^2-1+4\left\{(\ y+2\ )^2-4\right\}=-13$

$(\ x-1\ )^2-1+4(\ y+2\ )^2-16=-13$

$(\ x-1\ )^2+4(\ y+2\ )^2=4$

$\frac{(\ x-1\ )^2}{4}+(\ y+2\ )^2=1$　　よって　楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を

$x$ 軸方向に $1$，　$y$ 軸方向に $-2$　平行移動したもの

5．

⑴　$x^2+y^2=1\cdots$①上の点 $(\ a,\ b\ )$ での接線は $ax+by=1\cdots$②

$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$　　よって　$-x+\sqrt{3}y=2$

⑵　①は $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$

$-\dfrac{a}{b}=3$　とすると　$a=-3b\cdots$③

一方 $(a,\ b)$ は①の上にあるので　$-a^2+b^2=1\cdots$④

③，④より　$9b^2+b^2=1$　$10b^2=1$　　よって　$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

③より　$a=\mp\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　　したがって　$y=3x\pm\sqrt{10}$

別解

接線の方程式を $y=3x+n$ とおくと

$x^2+y^2=1$ と連立させて

$x^2+(3x+n)^2=1$

$10x^2+6nx+n^2-1=0$

接するから，判別式 $D=0$ である。

$D=(6n)^2-4\bullet10(n^2-1)=0$

$-4n^2+40=0$

$\therefore\ n=\pm\sqrt{10}$

よって，$y=3x\pm\sqrt{10}$

⑶　①より接線は　$ax+by=1$　これが $(1,\ -3)$ を通るので

$a-3b=1$　　よって　$a=1+3b\cdots$⑤

$(a,\ b)$ はア上の点なので　$a^2+b^2=1\cdots$⑥

⑤，⑥より　$1+6b+9b^2+b^2=1$　$10b^2+6b=0$　$2b(5b+3)=0$

$b=0$ のとき　$a=1$

$b=-\dfrac{3}{5}$ のとき　$a=1-\dfrac{9}{5}=-\dfrac{4}{5}$

$a,\ b$ を②に代入して，$x=1,\ -\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y=1$　　つまり　$4x+3y=-5$

６．

$y^2=4x\cdots$①と　$y=kx+1\cdots$②　の共有点を求める。

②を①に代入して

$$k^2x^2+2kx+1=4x$$

$$k^2x^2+\left(2k-4\right)x+1=0$$

よって　$D=\left(2k-4\right)^2-4\cdot k^2\cdot 1$

$=4k^2-16k+16-4k^2$

$=-16k+16\left(k-1\right)$　すなわち　$k<1$

(ⅰ)　$D>0$ すなわち $k<1$ のとき共有点は 2 個,

(ⅱ)　$D=0$ すなわち $k=1$ のとき共有点は 1 個,

(ⅲ)　$D<0$ すなわち $k>1$ のとき共有点は 0 個

７．

$x^2-2y^2=2\cdots$①と　$y=x+k\cdots$②の共有点を求める。

①，②より　$x^2-2\left(x^2+2kx+k^2\right)=2$

$$x^2-2x^2-4kx-2k^2-2=0$$

$$-x^2-4kx-2k^2-2=0$$

$$x^2+4kx+2k^2+2=0$$

接するから判断式 $D=0$ である。

よって　$D=16k^2-4\bullet\left(2k^2+2\right)=0$

$8k^2-8=0$　　$\therefore\ k=\pm 1$