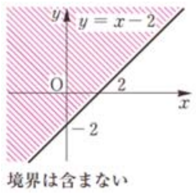
7章　図形と方程式　解答

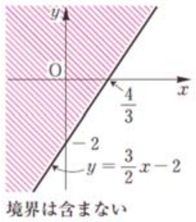
3節　不等式と領域

練習1

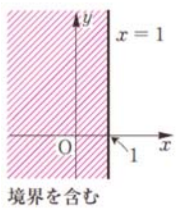
⑴　$y = x - 2$ の上側。境界を含まない。



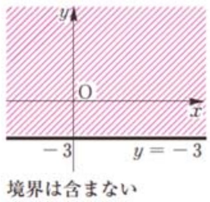
⑵　$3x - 4 < 2y$　$\dfrac{3}{2}x - 2 < y$　より　$y = \dfrac{3}{2}x - 2$ の上側。境界を含まない。



⑶　$x \leqq 1$　より　$x = 1$ の左側。境界を含む。

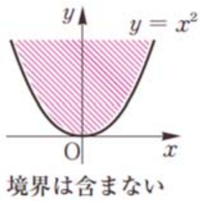


⑷　$y > -3$　より　$y = -3$ の上側。境界を含まない。

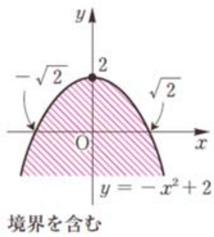


練習２

⑴　$y=x^2$ の上側。境界を含まない。

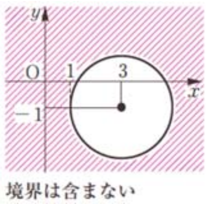


⑵　$y \leqq -x^2+2$　より　$y=-x^2+2$ の下側。境界を含む。



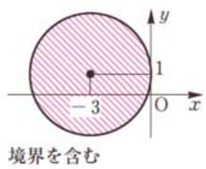
練習３

⑴　$(x-3)^2+(y+1)^2=4$ の外側。境界を含まない。

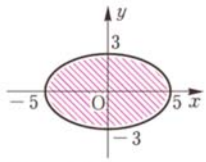


⑵　$x^2+6x+y^2-2y+1 \leqq 0$ は，　$(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+1 \leqq 0$

$(x+3)^2+(y-1)^2 \leqq 9$　よって　円 $(x+3)^2+(y-1)^2=9$ の内側。境界を含む。

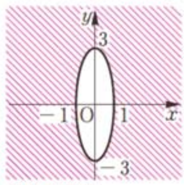


(3)　楕円 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の内側。境界を含まない。



境界は含まない

(4)　楕円 $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の外側。境界を含む。

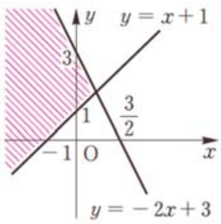


境界を含む

練習 4

(1)　$y=x+1$ の上側かつ　$y=-2x+3$ の下側。

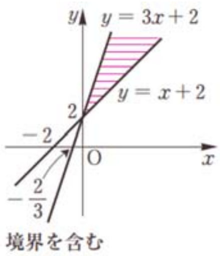
よって右図斜線部分。境界を含まない。



境界は含まない

(2)　$\begin{cases} 3x+2 \geqq y \\ x+2 \leqq y \end{cases}$　なので　$y=3x+2$ の下側 かつ　$y=x+2$ の上側。

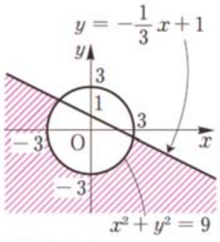
よって右図斜線部分。境界を含む。



境界を含む

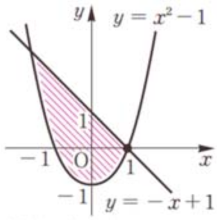
(3) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 9 \\ 3y \leqq -x+3 \end{cases}$ つまり $y \leqq -\dfrac{1}{3}x+1$ より 円 $x^2+y^2=3$ の外側かつ $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ の下側。

よって右図斜線部分。境界を含む。



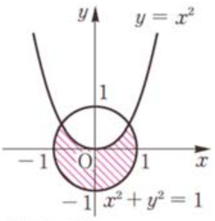
境界を含む

(4) $y=-x+1$ の下側かつ $y=x^2-1$ の上側。 よって下図斜線部分。境界を含まない。



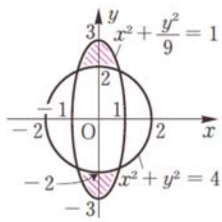
境界は含まない

(5) 円 $x^2+y^2=1$ の内側かつ $y=x^2$ の下側。よって下図斜線部分。境界を含む。



境界を含む

(6) 円 $x^2+y^2=4$ の外側かつ 楕円 $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ の内側。よって下図斜線部分。境界を含まない。



境界は含まない

練習５

4 つの不等式をみたす領域は

$x-y \geqq -2$ は　$y \leqq x+2$ で　$y=x+2$ の下側。

$3x+y \leqq 6$ は　$y \leqq -3x+6$ で　$y=-3x+6$ の下側。

$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より第 1 象限　よって右図斜線の部分。但し境界を含む。

$2x+y=k \cdots$①とおくと$y=-2x+1$ と変形できる。

k は①が点$(1,\ 3)$を通るときに最大になり，$k=2 \bullet 1+3=5$

点$(0,\ 0)$を通るとき最小になり，$k=0$

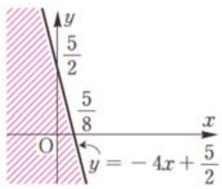
よって $\begin{cases} x=1,\ y=3 \text{ のとき　最大値 } 5 \\ x=0,\ y=0 \text{ のとき　最小値 } 0 \end{cases}$

節末問題

１．

⑴　$8x+2y-5<0$　$2y<-8x+5$　$y<-4x+\frac{5}{2}$

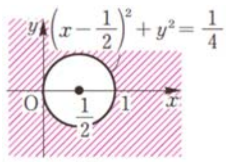
よって　$y=-4x+\frac{5}{2}$ の下側。境界を含まない。



境界は含まない

⑵　$x^2+y^2-x \geqq 0$　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2 \geqq 0$　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqq \frac{1}{4}$

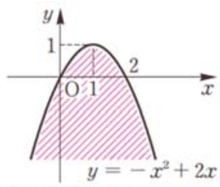
よって　中心$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$半径 $\frac{1}{2}$ の内の外側。境界を含む。



境界を含む

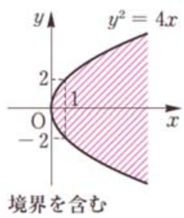
⑶　$y<-x^2+2x=-(x^2-2x)$　$=-\{(x-1)^2-1\}$　$=-(x-1)^2+1$

よって　$y=-(x-1)^2+1$ の下側。境界を含まない。



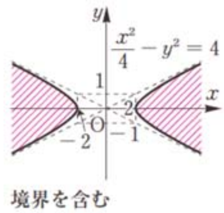
境界は含まない

⑷　$y^2 \geqq 4x$　$4x \geqq y^2$　$x \geqq \dfrac{1}{4}y^2$　よって　$x = \dfrac{1}{4}y^2$ の右側。境界を含む。



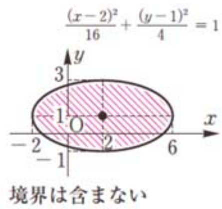
⑸　$\dfrac{x^2}{4} - y^2 \geqq 1$　$\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{1^2} \geqq 1$　よって双曲線 $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = 1$

で分けられる領域のうちの原点を含まない領域の和。境界を含む。



⑹　$\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{4} < 1$　$\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-1)^2}{2^2} < 1$

よって楕円 $\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ の内側。境界を含まない。



２．

⑴　$(x+y+1)(x-2y+4) > 0$

(ⅰ)　$x+y+1>0$ は　$y > -x-1$ より　$y = -x-1$ の上側（境界含まず）

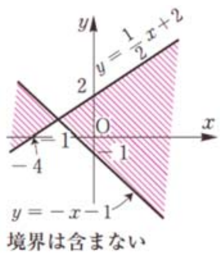
(ⅱ)　$x+y+1<0$ は　(ⅰ)と同様　$y = -x-1$ の下側（境界含まず）

(ⅲ)　$x-2y+4>0$ は　$x+4>2y$　$\dfrac{1}{2}x+2>y$　より　$y = \dfrac{1}{2}x+2$ の下側（境界含まず）

(ⅳ)　$x-2y+4<0$ は　(ⅲ)と同様　$y = \dfrac{1}{2}x+2$ の上側（境界含まず）

与式の表す領域は　「(ⅰ)かつ(ⅲ)」又は「(ⅱ)かつ(ⅳ)」の領域なので　図の斜線の領域が答。

境界を含まない。



⑵　$(x-y)(x^2-y^2-2)\leqq 0$

(ⅰ)　$x-y\geqq 0$は　$x\geqq y$より　$y\leqq x$.　よって　$y=x$より下側（境界含む）

同様

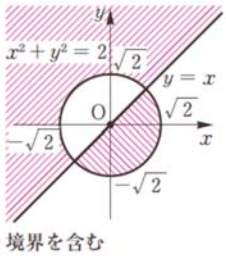
(ⅱ)　$x-y<0$は　$y=x$より上側（境界含む）

(ⅲ)　$x^2+y^2-2\geqq 0$は　$x^2+y^2\geqq 2$より　円$x^2+y^2=2$の外側（境界含む）

同様

(ⅳ)　$x^2+y^2-2\leqq 0$は　$x^2+y^2\leqq 2$より　円$x^2+y^2=2$の内側（境界含む）

与式の表す領域は　「(ⅰ)かつ(ⅳ)」又は「(ⅱ)かつ(ⅲ)」の領域なので　図の斜線領域が答。
境界を含む。

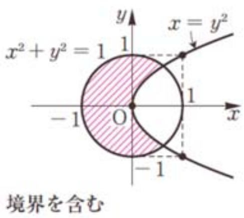


$x^2+y^2\leqq 1$は　円$x^2+y^2=1$の内側（境界を含む）

⑶　$y^2\leqq -x$は　$x\leqq y^2$より　$x=y^2$の左側（境界を含む）

よって　図の斜線の領域が答。

境界を含む。



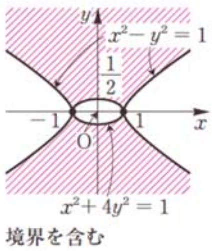
⑷　$x^2+4y^2\geqq 1$は　$\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\geqq 1$なので　楕円$\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ の外側（境界を含む）

$x^2-y^2\leqq 1$は　双曲線$x^2-y^2=1$で分けられる領域のうちの原点を含む領域（境界を含む）

楕円と双曲線の共有点は　2点$(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$

よって　図の斜線の領域が答。

境界を含む。



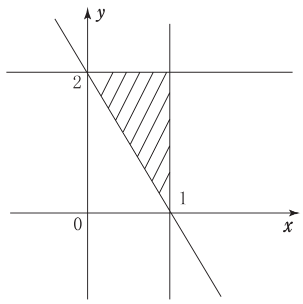
３．

$x \leqq 1$ は　$x=1$ より左側。　（境界を含む）

$y \leqq 2$ は　$y=2$ より下側。（境界を含む）

$2x+y-2 \geqq 0$ は　$y \geqq -2x+2$ なので　$y=-2x+2$ より上側。（境界を含む）

よって　与式の表す領域は図の斜線領域。



(i)　$x+2y=k \cdots$①とおくと $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ である。

与式の3つの条件をみたす点$($斜線内の点$)$のうちアをみたす点が存在するのは、

①が斜線と共有点をもつときである。　そのとき y 切片の値 $\dfrac{k}{2}$ つまり k が最小になるのは、

①が A$(1,\ 0)$を通るときで，$(1,\ 0)$を代入すると　$k=1+2\bullet 0=1$

一方，y 切片の値 $\dfrac{k}{2}$　つまり k が最大になるのは①が B$(1,\ 2)$を通るときで，

$(1,\ 2)$を代入すると　$k=1+2\bullet 2=5$

よって最大値は5，最小値は1

(ii)　$x^2+y^2=k^2 \cdots$②とおくと　(i)と同様に考えて

k が最小になるのは，円②が $y=-2x+2$

つまり　$2x+y=2$ と接するとき。

よって　OCの長さが k の最小値。これは点と直線の距離を求める公式

『$(x_0,\ y_0)$と $ax+by+c=0$ との距離 h は　$h=\dfrac{|\ ax_0+by_0+c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}}$』

を使うと　$\mathrm{OC}=\dfrac{|\ 2\cdot 0+0-2\ |}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

または，OC⊥オより，『垂直な2直線の傾き m, m' の関係は $mm'=-1$』

を使うと$($OCの傾き$)=\dfrac{1}{2}$

よって　直線OCは $y=\dfrac{1}{2}x$　これとオを連立させて $-2x+2=\dfrac{1}{2}x$

よって　$x=\dfrac{4}{5}$　したがって　$y=\dfrac{2}{5}$

Cは$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$と分ったので2点間の距離を求める公式より

$\mathrm{OC}=\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}-0\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{25}+\dfrac{4}{25}}=\sqrt{\dfrac{20}{25}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

一方　k が最大になるのは円エがBを通るとき。

つまり $k=\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ のとき。

k^2 すなわち x^2+y^2 の最大値は5，　最小値は $\dfrac{4}{5}$

4．

システムXは使用1時間につき3kwの電気と1m^{3}のガスを使用して2kgの金属が生産できるとし，システムYは使用1時間につき1kwの電気と2m^{3}のガスを使用して1kgの金属が生産できるとする。

Xをx時間, Yをy時間使用したとすると　$x \geqq 0$,　$y \geqq 0$で

電気量については　$3x+y \leqq 200 \cdots$①

ガス量については　$x+2y \leqq 200 \cdots$②

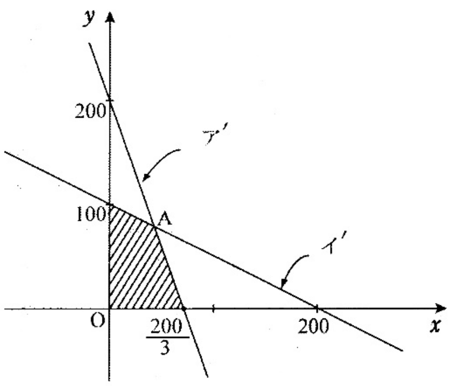
と表せるから，領域は下図の斜線部分（境界を含む。）である。

生産量は$\left(2x+y\right)$kgで表せるから$2x+y=k\cdots$③とおくと$y=-2x+k$と変形できる。

kは, ①と②の交点$\left(40,\ 80\right)$を通るとき最大となる。このとき, $k=2\cdot 40+80=160$

したがって, 電力はXが2 120kw, Yが80kw, Xが40m^2, Yが160m^2,

このときの生産量は 120kg



③に代入すると，$k=2\cdot 40+80=160\left(\text{kg}\right)$。　これが最大生産量で,

その時の使用電気量は　システムXが120kw, システムYが80kw

使用ガス量は　システムXが40m^2, システムYが160m^2

5．

⑴ $\begin{cases}\left(y+x\right)\left(y-x\right)<0 \\ x^2+y^2<2\end{cases}$

別解

$\begin{cases}y>x \\ y<-x \\ x^2+y^2<2\end{cases}$　または　$\begin{cases}y<x \\ y>-x \\ x^2+y^2<2\end{cases}$

⑵ $\begin{cases}x^2+y^2>1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2<1\end{cases}$

⑶ $\begin{cases}y<x^2 \\ y>2x-1 \\ y>-2x-1 \\ -1<x<1\end{cases}$