

8章 集合・場合の数・命題 解答

1節 集合と要素の個数

練習1

$$(1) -5 \in Z \quad (2) \frac{1}{2} \notin Z \quad (3) \sqrt{2} \notin Z \quad (4) 0 \in Z$$

練習2

$$(1) \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$(2) \{3, 5, 7, \dots\}$$

練習3

$$A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$A = \{3n \mid n \text{ は自然数}\}$$

練習4

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 8\}$$

なので A, B, C の関係は $B = C \subset A$ である。

練習5

$$A \text{ にも } B \text{ にも属する要素は, } 6, 12 \text{ なので } A \cap B = \{6, 12\}$$

$$A \text{ または } B \text{ に属する要素全体を考えると } A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15\}$$

練習6

$$A \cap B = \{5, 7\} \text{ だから } 7 \in B \text{ である。}$$

$$\therefore a = 7$$

$$\text{このとき, } A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

練習7

$$A \text{ にも } B \text{ にも属する要素はないので } A \cap B = \phi$$

$$A \text{ または } B \text{ に属する要素全体を考えると } A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$$

練習8

$$\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \phi$$

練習 9

$$A \cap B = \{2, 4\} \text{ なので, } \overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\text{一方, } \bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \bar{B} = \{1, 6, 7, 8, 9\} \text{ なので, } \overline{A \cup B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\text{よって, } \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$

練習 10

$$(i) P \cup Q = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\} \text{ より } \overline{P \cup Q} = \{2, 4\}$$

$$\text{一方, } \bar{P} = \{2, 4, 6, 8\}, \bar{Q} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ なので, } \overline{P \cap Q} = \{2, 4\}$$

$$\text{よって, } \overline{P \cup Q} = \overline{P \cap Q}$$

$$(ii) P \cap Q = \{5, 7\} \text{ より } \overline{P \cap Q} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\text{一方, (i) より, } \overline{P \cup Q} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \text{ よって, } \overline{P \cap Q} = \overline{P \cup Q}$$

練習 11

$$(1) A = \{3, 6, 9, \dots, 96, 99\} \text{ なので}$$

$$\text{要素の個数は } 99 \div 3 = 33. \text{ よって } n(A) = 33$$

$$(2) B = \{5, 10, 15, \dots, 90, 95, 100\} \text{ なので}$$

$$\text{要素の個数は } 100 \div 5 = 20. \text{ よって } n(B) = 20$$

$$(3) A \cap B \text{ は } 100 \text{ 以下の } 15 \text{ の倍数全体の集合, つまり}$$

$$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \text{ なので}$$

$$n(A \cap B) = 6$$

練習 12

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 33 + 20 - 6 = 47$$

節末問題

1.

$$(1) \text{ ド・モルガンの法則より } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 3\}$$

$$(2) \overline{A \cup B}, \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \text{ についてド・モルガンの法則を使うと}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \{4, 5, 9\} \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \dots \textcircled{2}$$

①は A に属さず B にだけ属している要素の集合なので

②の要素から①の要素を除いたものの集合が A . つまり $A = \{2, 6, 7, 8\}$

2.

1 から 100 までの自然数の集合を U ,

そのうち 3 の倍数全体の集合を A , 4 の倍数全体の集合を B とすると

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 99\} \text{ であって } n(A) = 99 \div 3 = 33,$$

$$B = \{4, 8, 12, \dots, 100\} \text{ であって } n(B) = 100 \div 4 = 25.$$

$$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots, 96\} \text{ (12の倍数全体の集合)}$$

$$\text{であって } n(A \cap B) = 96 \div 12 = 8.$$

$$(1) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 25 - 8 = 50$$

$$(2) \quad n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 50 = 50$$

$$(3) \quad n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 33 - 8 = 25$$

3.

問題 1 が正解であった生徒の集合を A ,

問題 2 が正解であった生徒の集合を B とする。今,

$$n(A) = 32, n(B) = 21, n(\overline{A \cup B}) = 5 \quad \text{なので}$$

$$(1) \quad n(A \cup B) = 40 - n(\overline{A \cup B}) = 40 - 5 = 35$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{よって } n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 32 + 21 - 35 = 18 \text{人}$$

$$(2) \quad n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 32 - 18 = 14 \text{人}$$

$$n(\overline{A \cap B}) = n(B) - n(A \cap B) = 21 - 18 = 3$$

$$14 + 3 = 17 \text{人}$$

4.

ラーメンの好きな人の集合を A

カレーライスの好きな人の集合を B とすると

$$n(\overline{U}) = 100, n(A) = 72, n(B) = 63 \text{ である。}$$

$$n(A \cap B) = x \text{ とすると}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 72 + 63 - x = 135 - x$$

ここで, $72 \leq n(A \cup B) \leq 100$ だから

$$72 \leq 135 - x \leq 100$$

$$\therefore 35 \leq x \leq 63$$