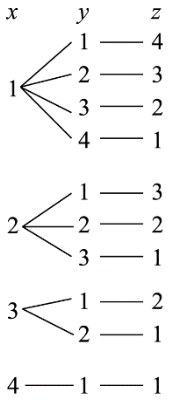
８章　集合・場合の数・命題　解答

２節　場合の数・順列・組合せ

練習１

10 通り



練習２

$(大,\ 小)=(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

の 6通り

練習３

(ｉ)　大さいころの目の出方は 6 通りあり，そのそれぞれについて
小さいころの目の出方が 6 通りあるので　$6\times 6=36$ 通り。

(ⅱ)　(ｉ)と同様 大中 2 個のさいころの目の出方は 36 通りあり，
そのそれぞれについて小さいころの目の出方は 6 通りあるので
$36\times 6=216$ 通り。

練習４

$108=3^3\times 2^2$　であり　3^3 の約数は $1,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3$ で 4 個，
2^2 の約数は $1,\ 2^1,\ 2^2$ で 3 個。

108 の約数は必ず 3^3 の約数の一つと 2^2 の約数の一つとの積で表せるから

答は　$4\times 3=12$ 個

練習５

⑴　${}_8\mathrm{P}_2=8\times 7=56$

⑵　${}_{10}\mathrm{P}_4=10\times 9\times 8\times 7=5040$

⑶　${}_7\mathrm{P}_5=7\times 6\times 5\times 4\times 3=2520$

練習６

${}_6\mathrm{P}_4=6\times 5\times 4\times 3=360$ 通り

練習７

⑴　$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

⑵　$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

⑶　$7 \times {}_6P_6 = 7 \times 6! = 7! = 5040$

⑷　$\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

練習８

⑴　両端に男子を並べる方法は　${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$（通り）

そのそれぞれについて残り４人を並べる方法は　${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$（通り）

よって　${}_3P_2 \times {}_4P_4 = 144$（通り）

⑵　女子３人をまとめて a と名付け，男子を $b,\ c,\ d$ と名づけると，

4つの文字を1列に並べる順列になる。その並べ方は　${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$（通り）

そのそれぞれについて女子の並び方が ${}_3P_3$ 通りあるので

${}_4P_4 \times {}_3P_3 = 4! \times 3! = 144$（通り）

⑶　男子の並べ方は ${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$（通り）

そのそれぞれについて(ｉ)女子が1, 3, 5番目に並ぶ方法は ${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$（通り）

よって　${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36$（通り）(ⅱ)女子が2, 4, 6番目に並ぶ方法は ${}_3P_3 \times {}_3P_3 = 36$（通り）

よって　答は　$36 + 36 = 72$（通り）

練習９

⑴　${}_7C_2 = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

⑵　${}_6C_4 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$

⑶　${}_{12}C_3 = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$

⑷　${}_8C_1 = 8$

練習 10

${}_{10}C_2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$（通り）

練習 11

⑴ $_{10}C_9 = {}_{10}C_1 = 10$

⑵ $_{8}C_6 = {}_{8}C_2 = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

⑶ $_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$

練習 12

⑴ 男子 2 人の選び方は $_6C_2$ 通り。そのそれぞれについて
女子 2 人の選び方は $_4C_2$ 通り。

よって　$_6C_2 \times {}_4C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1} = 90$（通り）

⑵ 男子 6 人，女子 4 人の中から 4 人を選ぶ方法は

$_{10}C_4 = \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$（通り）

このうち男子ばかり 4 人を選ぶ方法は　$_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$（通り）

したがって　少なくとも一人が女子である選び方は　$210 - 15 = 195$（通り）

練習 13

⑴ 8 人から A へ入る 2 人を選ぶ方法は $_8C_2$ 通り。
残り 6 人から B へ入る 2 人を選ぶ方法は $_6C_2$ 通り。
残り 4 人から C へ入る 2 人を選ぶ方法は $_4C_2$ 通り。
残り 2 人は D へ入ることになるので

$_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1 = \dfrac{8\times7}{2\times1}\times\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1} = 7\times30\times12 = 7\times360 = 2520$（通り）

⑵ 1 つの組分けに対して A，B，C，D の割り当て方は 4! 通り。

よって　$\dfrac{2520}{4!} = \dfrac{7\times6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} = 105$（通り）

練習 14

（ｉ）7 人が円形に並ぶとき，その並び方は$(7-1)! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$通り。

（ii）また女子 2 人をまとめて a と名付け，男子を b，c，d，e，f と名付けると 6 文字を
円形に並べる順列となる。並び方は$(6-1)! = 120$通り。
そのそれぞれについて女子の並び方が $_2P_2 = 2$ 通り。
よって　答は　$120\times2 =$ 順に, 女子2人が隣り合うのは 240 通り

練習 15

⑴　1 つの空欄に X，Y，Z，の 3 通りの記入方法があるから

$3^6 = 729$ 通り

⑵　2 種類の文字の組合せが ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り

1 つの空欄にはそれぞれ 2 通りの記入方法があるから 2^6 通り

よって，${}_3\mathrm{C}_2 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$ 通り

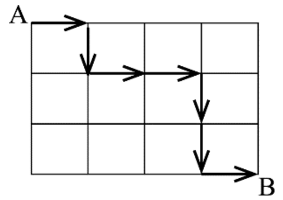
練習 16

$$\frac{(3+4+2)!}{3!\,4!\,2!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{3\times2\times2\times1} = 1260 \text{ 通り}$$

練習 17

右の図のように → を 4 個，↓ を 3 個並べると考えて

$$\frac{(4+3)!}{4!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35 \text{ 通り}$$



練習 18

⑴　$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

⑵　$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

練習 19

⑴　$(x+1)^5 = {}_5\mathrm{C}_0\, x^5 + {}_5\mathrm{C}_1 x^4 \cdot 1^1 + {}_5\mathrm{C}_2 x^3 \cdot 1^2 + {}_5\mathrm{C}_3 x^2 \cdot 1^3 + {}_5\mathrm{C}_4 x^1 \cdot 1^4 + {}_5\mathrm{C}_5 1^5$

$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

⑵　$(2a-b)^4 = {}_4\mathrm{C}_0 (2a)^4 + {}_4\mathrm{C}_1 (2a)^3 \cdot (-b)^1 + {}_4\mathrm{C}_2 (2a)^2 \cdot (-b)^2 + {}_4\mathrm{C}_3 (2a)^1 \cdot (-b)^3 + {}_4\mathrm{C}_4 (-b)^4$

$= 16a^4 + 4\times8a^3(-b) + 6\times4a^2b^2 + 4\times2a(-b^3) + b^4$

$= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$

⑶　$(x-2)^6 = {}_6\mathrm{C}_0 x^6 + {}_6\mathrm{C}_1 x^5 (-2)^1 + {}_6\mathrm{C}_2 x^4 (-2)^2 + {}_6\mathrm{C}_3 x^3 (-2)^3 + {}_6\mathrm{C}_4 x^2 (-2)^4 + {}_6\mathrm{C}_5 x (-2)^5 + {}_6\mathrm{C}_6 (-2)^6$

$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

練習 20

⑴ $(x-1)^8$ の展開式における一般項は

${}_8C_r x^{8-x}\cdot(-1)^r$ であり，x^3 の項は $r=5$ のときであるから

x^3 の係数は　${}_8C_3(-1)^5=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times(-1)=-56$

⑵ $\left(2x-y^2\right)^7$ の展開式における一般項は

${}_7C_r(2x)^{7-x}\cdot\left(-y^2\right)^r$ であり，x^4y^6 の項は $r=3$ のときであるから

x^4y^6 の係数は　${}_7C_3\cdot2^4\cdot(-1)^3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times16\times(-1)=-560$

⑶ $\left(x^2+3x\right)^9$ の展開式における一般項は

${}_9C_r\left(x^2\right)^{9-r}\cdot(3x)^r={}_9C_x x^{18-2r}\cdot3^r\cdot x^r={}_9C_x\cdot3^r\cdot x^{18-r}$ であり，x^{14} の項は $r=4$ のときであるから

x^{14} の係数は　${}_9C_4\cdot3^4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times3^4=10206$

⑷ $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式における一般項は

${}_7C_r(2x)^{7-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_7C_r2^{7-r}(-1)^r x^{7-2r}$ であり，x^3 は $r=2$ のときであるから

x^3 の係数は　${}_7C_2 2^5(-1)^2=\dfrac{7\bullet6}{2\bullet1}\bullet32\bullet1=672$

節末問題

１．　100 円，50 円，10 円での支払い枚数をそれぞれ x，y，z として

$100x+50y+10z=300$ をみたす自然数 x，y，z の組が何通りあるかを調べる。

⑴　答は　4 通り。

⑵　答は 16 通り。

２．　母音は O，U，I，E の 4 つ，子音は T，S，D の 3 つである。

⑴　母音 4 つをまとめて X と名付けると X，T，S，D の並べ方は ${}_4P_4$ 通り。

そのそれぞれについて X の中での 4 つの母音の並べ方は ${}_4P_4$ 通り。

よって　${}_4P_4\times{}_4P_4=4!\times4!=576$ 通り。

⑵　母音 4 つの並べ方は ${}_4P_4$ 通り。

そのそれぞれについて母音と母音の間に子音を並べる方法は ${}_3P_3$ 通り。

よって　${}_4P_4\times{}_3P_3=4!\times3!=144$ 通り。

⑶　両端に母音をおく方法は ${}_4P_2$ 通り。

そのそれぞれについて残り 5 文字を並べる方法は ${}_5P_5$ 通り。

全 7 文字の並べ方が ${}_7P_7$ 通りあるので

答は　${}_7P_7-{}_4P_2\times{}_5P_5=7!-4\times3\times5!=(7\times6-4\times3)\times5!=3600$ 通り。

⑷　母音 4 つの並べ方は ${}_4P_4$ 通り。

そのそれぞれについて子音を 1 つずつを　ア M イ M ウ M エ M オ　（M は母音）

のアからオに置き，7 文字の順列をつくる。

子音をおく場所の選び方は ${}_5C_3$ 通り。そのそれぞれについて子音の並べ方は ${}_3P_3$ 通り。

よって　${}_4P_4\times{}_5C_3\times{}_3P_3=4!\times\dfrac{5\times4\times3}{3!}\times3!=1440$ 通り。

３．

⑴　女子 3 人をまとめて X とし，その他を A，B，C とする。

4 文字 X，A，B，C の円順列は $(4-1)!$ 通りで，そのそれぞれについて女子 3 人

の並び方が ${}_3P_3$ 通りあるので　$3!\times{}_3P_3=3!\times3!=36$ 通り。

⑵　先生と両隣の男子 2 人をまとめて Y とし，女子を D，E，F とする。

4 文字 Y，D，E，F の円順列は $(4-1)!$ 通りで，そのそれぞれについて Y の中の男子

の並び方が ${}_2P_2$ 通りあるので　$3!\times{}_2P_2=3!\times2!=12$ 通り。

⑶　男子 2 人が向かい合ってすわると，そのそれぞれについて残り 4 人のすわり方は

${}_4P_4$ 通り。　よって　$4\times3\times2\times1=24$ 通り。

４．

⑴　千の位に入る数字は 1～5 の 5 通り。

そのそれぞれについて百の位に入る数字は 5 通り。

そのそれぞれについて十の位に入る数字は 4 通り。

そのそれぞれについて一の位に入る数字は 3 通り。

よって　$5\times5\times4\times3=300$ 通り。

⑵　千の位に入る数字は 1～5 の 5 通り。

百の位は 0～5 のどれでもよいから 6 通り。

また，十の位，一の位についても同様に 6 通り。

よって　$5\times6\times6\times6=1080$ 通り。

5．

⑴　偶数 3 個の組合せは ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り。

そのそれぞれについて奇数 2 個の組合せは ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り。

よって　${}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2=4\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=40$ 通り。

⑵　1 を選んでおき，あとの 4 つを 2～8 から選ぶ。

よって　${}_7\mathrm{C}_4\times{}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ 通り。

⑶　8 を選んでおき，あとの 4 つを 1～7 から選ぶ。

よって　${}_7\mathrm{C}_4=35$ 通り。

6．

黒球 2 つをまとめて B 球とし，赤球 3 個，白球 4 個，B 球 1 個を 1 列に並べる。

同じものを含む順列の総数の公式より

$\dfrac{8!}{3!\,4!}=\dfrac{8\times7\times6\times5}{3!}=280$ 通り。

7．

⑴　a と b にはさまれる 2 人の並び方は 4×3 通り。

そのそれぞれについて a，b の並び方は ${}_2\mathrm{P}_2$ 通り。

そのそれぞれについて，この 4 人のかたまりと残り 2 人の順列は ${}_3\mathrm{P}_3$ 通り。

よって　$4\times3\times2\times3!=144$ 通り。

⑵　6 つの場所のうち a，b，c の入る 3 つの場所の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り。

場所がきまれば a，b，c の入り方は前から a，b，c の順。そのそれぞれについて

残り 3 つの場所への d，e，f の入り方は ${}_3\mathrm{P}_3$ 通り。

よって　${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{P}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3!}\times3!=120$ 通り。

８．

⑴　4 人組の選び方が $_9C_4$ 通り，そのそれぞれについて

3 人組の選び方が $_5C_3$ 通りある。残り 2 人が 2 人組をつくる。

よって　$_9C_4\times{}_5C_3\times{}_3C_2=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}\times\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=1260$ 通り。

⑵　A へ入る 3 人組の選び方が $_9C_3$ 通り，そのそれぞれについて

B へ入る 3 人組の選び方が $_6C_3$ 通りある。残り 3 人が C へ入る。

よって　$_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=1680$ 通り。

⑶　この場合の 3 組に A，B，C の名前をつける方法は 3! 通りあるので

(3)の場合の一つに(2)の 3! 種類の場合が対応する。

よって　$\dfrac{1680}{3!}=280$ 通り。

⑷　5 人組の選び方が $_9C_5$ 通り，そのそれぞれについて 2 人組の選び方が $_4C_2$ 通りある。

残り 2 人がもう一つの 2 人組をつくる。2 つの 2 人組を区別したときのつくり方は

$_9C_5\times{}_4C_2\times{}_2C_2$ 通りあるが　　ア

今区別をしないので，(2)と(3)の関係と同様に考えて，アを $\div\,2!$ すればよい。

よって　$\dfrac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}\times1\div2!=378$ 通り。

９．

⑴　a，b，c，d の 4 文字の順列の総数なので　$_4P_4=4\times3\times2\times1=24$ 通り。

⑵　3 種類の文字の組合せは $_4C_3$ 通りある。次の 4 つである。

（ⅰ）　a，b，c のとき

4 文字が a，a，b，c のとき，並べ方は $\dfrac{_4P_4}{2!}=12$ 通り。

4 文字が a，b，b，c のときも同様 12 通り。

（ⅱ）　a，b，d のとき

4 文字が a，a，b，d のとき，並べ方は同様 12 通り。

4 文字が a，b，b，d のときも 12 通り。

(ⅲ)　a，c，d のとき

4 文字は a，a，c，d なので並べ方は 12 通り。

(ⅳ)　b，c，d のとき

4 文字は b，b，c，d なので並べ方は 12 通り。

（ⅰ）～（ⅳ）から 72 通り。

⑶　2 種類の文字で 4 文字をつくれるのは次の 3 種類

(ｉ)　a，b のとき　a，a，b，b の並べ方は $\dfrac{{}_4\mathrm{P}_4}{2!\,2!} = 6$ 通り。

a，a，a，b の並べ方は $\dfrac{{}_4\mathrm{P}_4}{3!} = 4$ 通り。

(ⅱ)　a，c のとき　4 文字は a，a，a，c で同様 4 通り。

(ⅲ)　a，d のとき　4 文字は a，a，a，d で同様 4 通り。

これらと

(1) (2) の場合をすべて合わせて答を得る。

$24 + 72 + 6 + 4 \times 3 = 114$ 通り。

10.

⑴　頂点 2 の組のつくり方が ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りで，

そのうち八角形の辺になるものを除いて $\dfrac{8\times 7}{2\times 1} - 8 = 20$（本）

⑵　頂点の 3 つ組のつくり方は ${}_8\mathrm{C}_3$ 通り

なので　$\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$（個）

⑶　一辺のみ共有する三角形は，一つの辺につき 4 個ずつある。

よって　$4 \times 8 = 32$（個）

二辺を共有する三角形は，その二辺に対し 1 個である。

よって　$1 \times 8 = 8$（個）　(2) より　答は　$56 - (32 + 8) = 16$（個）

11.

分母の $100 = 2^2 \times 5^2$ をみると分子が 2 又は 5 の倍数のとき約分されると分る。

1 から 98 までで 2 の倍数は $98 \div 2 = 49$（個）

1 から 95 までで 5 の倍数は $95 \div 5 = 19$（個）

2 の倍数かつ 5 の倍数になる数は　1 から 90 までで $90 \div 10 = 9$（個）

よって　分子が 2 又は 5 の倍数である数は　$49 + 19 - 9 = 59$

したがって　約分できない分数は　$99 - 59 = 40$（個）

12.

二項定理 $(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$ において，$a = 1$, $b = -1$　とすると

$(1-1)^n = 0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots - {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n$

$\therefore\quad {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n \quad \cdots①$

一方，二項定理において，$a = 1$, $b = 1$ とすると

$(1+1)^n = 2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n \quad \cdots②$

よって，①＋②より, $2^n = 2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n)$

よって, $2^{n-1} = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}$