８章　集合・場合の数・命題　解答

３節　命題と証明

練習１

⑵　「n が奇数である」が仮定で「$n+1$ は偶数である」が結論

⑶　「$x=2$ である」が仮定で「$x^2=5$ である」が結論

練習２

⑴　真

⑵　偽，反例は $x=-2$　　これは $x^2=4$ を満たすが x は 2 でない。

⑶　偽，反例は $x=-2$，$y=1$，これは $x<y$ を満たすが $x^2<y^2$ は満たさない。

⑷　真

練習３

$x>1 \quad \Rightarrow \quad x>3$　は偽

$x>1 \quad \Leftarrow \quad x>3$　は真　なので

$x>1$ は $x>3$ であるための必要条件であるが，　十分条件ではない。

練習４

⑴　$x=0 \quad \Rightarrow \quad xy=0$　は真。よって　$x=0$ は十分条件である。

$x=0 \quad \Leftarrow \quad xy=0$　は偽　なので　必要条件ではない。

⑵　$x<2 \quad \Rightarrow \quad x<-1$　は偽　なので　十分条件ではない。

$x<2 \quad \Leftarrow \quad x<-1$　は真。よって　$x<2$ は必要条件である。

⑶　$x+y=0 \quad \Rightarrow \quad xy=0$　は偽なので　十分条件でない。

$x+y=0 \quad \Leftarrow \quad xy=0$　も偽なので　必要条件でもない。

⑷　$x=1$　又は　$x=2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(y-2)=0$　は真。よって　十分条件である。

$x=1$　又は　$x=2 \quad \Leftarrow \quad (x-1)(y-2)=0$　も真。よって　必要条件でもある。

⑸　$\angle \mathrm{A}=60^\circ \quad \Rightarrow$　△ABC は正三角形は偽なので　十分条件でない。

$\angle \mathrm{A}=60^\circ \quad \Leftarrow$　△ABC は正三角形は真。よって　必要条件である。

練習５

条件 p は $(x-1)(x-3)<0$ より $1<x<3$

条件 q は $(x-2)(x-a)\leqq 0$

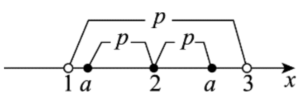
$a>2$ のとき $2\leqq x\leqq a$

$a<2$ のとき $a\leqq x\leqq 2$

$a=2$ のとき $(x-2)^2<0$ より解答なし

p が q であるための必要条件になるためには右の図から

$1<a<3$



練習 6

⑴ $\overline{x \neq 0 \text{ かつ } x \neq 1}$ は $\overline{x \neq 0}$ または $\overline{x \neq 1}$ よって $x = 0$ または $x = 1$

⑵ $\overline{x \leqq 0 \text{ または } y \leqq 0}$ は $\overline{x \leqq 0}$ かつ $\overline{y \leqq 0}$ よって $x > 0$ かつ $y > 0$

練習 7

⑴ 逆は，$x = -3 \Leftarrow x^2 = 9$ 偽 $\left(x = 3 \text{ が反例} \right)$

裏は，$x \neq -3 \Rightarrow x^2 \neq 9$ 偽 $\left(x = 3 \text{ が反例} \right)$

対偶は，$x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq -3$ 真

⑵ 逆は，n が 4 の倍数ならば n は偶数である 真

裏は，n が偶数でないならば n は 4 の倍数でない 真

対偶は，n が 4 の倍数でないならば n は偶数でない 偽 $\left(n = 2 \text{ が反例} \right)$

⑶ 逆は，$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ 真

裏は，$x^2 \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 0$ 真

対偶は，$x \leqq 0 \Rightarrow x^2 \leqq 0$ 偽 $\left(x = -1 \text{ が反例} \right)$

練習 8

整数 n は k を整数として

$n = 4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$ のいずれかの形で表せる

(ｉ) $n = 4k$ のとき $n^2 = 16k^2$

よって，4 で割った余りは 0

(ⅱ) $n = 4k+1$ のとき $n^2 = \left(4k+1 \right)^2 = 4\left(4k^2 + 4k \right) + 1$

よって，4 で割った余りは 1

(ⅲ) $n = 4k+2$ のとき $n^2 = \left(4k+2 \right)^2 = 4\left(4k^2 + 6k + 1 \right)$

よって，4 で割った余りは 0

(ⅳ) $n = 4k+3$ のとき $n^2 = \left(4k+3 \right)^2 = 4\left(4k^2 + 6k + 2 \right) + 1$

よって，4 で割った余りは 1

(ｉ)〜(ⅳ)より命題は真である。

練習 9

「$x \neq 2$ または $y \neq 3$」の否定は「$x = 2$ かつ $y = 3$ である」

なので，与えられた命題の対偶は，次の通り。

「$x = 2$ かつ $y = 3$」ならば $xy = 6$ である。 よって，真である。

練習 10

対偶は「n が偶数ならば n^2 は偶数である」である。

$n = 2k$ と書けるとき $n^2 = 4k^2$ なので，n^2 は偶数。 よって，命題は真。$\left(k \text{ は整数} \right)$

練習 11

$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，1 以外に公約数をもたないような 2 つの正の整数 m，n を用いて

$\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$ と表せる。　よって, $3 = \dfrac{m^2}{n^2}$　つまり $3n^2 = m^2$。　ア

よって，m^2 は 3 の倍数。　したがって，m は 3 の倍数である。　イ

(3 の倍数でなければ m は $3k+1$ または $3k+2$ の形で表せるが，いずれの場合も

m^2 が 3 の倍数にならない)

つまり，$m = 3l$ (l は整数) の形で書ける。これを　アに代入すると，$3n^2 = 9l^2$

よって　$n^2 = 3l^2$　したがって n^2 は 3 の倍数である。　つまり，n は 3 の倍数である。　ウ

イ，ウより，m，n はともに 3 の倍数となり，1 以外に公約数をもたないとした仮定に矛盾する。

よって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

節末問題

１．

⑴　偽である。反例は，$x = -1$, $y = 1$

⑵　偽である。反例は，$x = 0$, $y = 2$

⑶　真。対偶をとると「a，b とも奇数ならば ab は奇数」

これは正しいので，与えられた命題も真。

２．

⑴　$x = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$　は真。

$x = -2 \quad \Leftarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$　も真。

よって　必要十分条件である。

⑵　$x \neq 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 9$　は偽（反例は $x = -3$）

$x \neq 3 \quad \Leftarrow \quad x^2 \neq 9$　は真

なぜなら　$x = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$　つまり対偶が真。

よって　$x \neq 3$ は必要条件である。

⑶　$x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 0$　は真

なぜなら　$x^2 + y^2 = 0$　となるのは　$x = 0$ かつ $y = 0$ のとき。　よって　$xy = 0$

$xy = 0 \quad \Leftarrow \quad x^2 + y^2 = 0$　は偽。（反例は $x = 0$, $y = 1$）

したがって　$x^2 + y^2 = 0$　は十分条件である。

⑷　$xy > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$　または　$y > 0$　は偽。（反例は $x = -1$, $y = -1$）

$xy > 0 \quad \Leftarrow \quad x > 0$　または　$y > 0$　も偽。（反例は $x = 0$, $y = 1$）

したがって　必要条件でも十分条件でもない。

3．

$n^2+n=n(n+1)$ は連続する整数の積である。それらの整数は

$3k,\ 3k+1,\ 3k+2,\ 3k+3$ の中の連続する 2 つだとしてよい。（k は整数）

$3k(3k+1),\ (3k+1)(3k+2),\ (3k+2)(3k+3)$ を 3 で割った余りは，

それぞれ0，2，0。　　よって，命題は真である。

4．

⑴ 逆は　$x \geqq 1 \Rightarrow x > 1$　偽（反例は $x=1$）

裏は　$x \leqq 1 \Rightarrow x < 1$　真

対偶は　$x < 1 \Rightarrow x \leqq 1$　真

⑵ 逆は　$a+b=0 \Rightarrow a=0$ かつ $b=0$　偽（反例は $a=1,\ b=-1$）

裏は　$a \neq 0$ 又は $b \neq 0 \Rightarrow a+b \neq 0$　偽（反例は $a=-1,\ b=1$）

対偶は　$a+b \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ または $b \neq 0$　真

⑶ 逆は　$a+b=0 \Rightarrow ab=0$　偽（反例は $a=-1,\ b=1$）

裏は　$ab \neq 0 \Rightarrow a+b \neq 0$　偽（反例は $a=-1,\ b=1$）

対偶は　$a+b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$　偽（反例は $a=0,\ b=1$）

5．

対偶は　$a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0 \Rightarrow a+b \leqq 0$

$a \leqq 0$ のとき　$a+b \leqq a+0$　（$b \leqq 0$より）

$\leqq 0+0$　（$a \leqq 0$より）

$=0$

よって，対偶は真。したがって，与えられた命題は真。

６．

〔1〕与えられた命題を①とする。

$n=1$ のとき

左辺 $=1\cdot 2=2$，右辺 $=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$

よって，$n=1$ のとき①は成り立つ。

〔2〕$n=k$ のとき①が成り立つとすると

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+k(k+1)=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+2)\cdots$②

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

〔1〕,〔2〕により，すべての自然数 n について①が成り立つ。