2020 年度入試での出題

「高校数学・新課程を考える会」事務局長／予備校講師
大淵智勝

・はじめに

新型コロナウイルスの影響で，実施そのものが危ぶまれていた 2020 年度の大学入試ではあったが，なんとか入学試験自体は行われた。ただ，2020 年度入試は，最後のセンター試験であり，「浪人をすると共通テストにかわり，英語の民間試験導入などで大変になる」という危機感から，安全志向の強い受験生が多かったようで，私大の一般選抜の延べ志願者数が減少に転じるなどといった影響があったようだ。もちろん，「英語の民間試験導入の延期」や「共通テストで記述が出題されない」といったことは，2020 年に入る前に決定されたが，それまでの受験対策や志望校をそこで急激に変更するということもリスクであり，結果，安全志向は変わらなかったといえる。また，センター試験での平均点が低下したことで，国公立大学の志願者も減少したと考えられている。一方，数学の出題に関しては，昨年度の入試に比べると，東大や京大では難化したように見受けられる。ただ，全体としてみると難化したようにみえても，個々の問題は別で，こういった年には「解ける問題」を確実にみつけて得点に結びつけていく必要がある。その辺りの見極めも今年の入試の一つの鍵となったのではないだろうか。

・大学入試センター試験

令和最初で最後のセンター試験となったが，数学 IA については，ここ数年では最も得点しづらいものとなっていた。第３問「確率」の問題の[1]は，４つの選択肢がそれぞれ別々の試行について問うている，今までにはみたことのない傾向の問題であった。2018 年度のセンター試験に共通テストを見据えた出題があったが，この問題もそのような出題ではなかろうか。

なお，現在，共通テストについての模試などを各社が作成しているが，2018 年までに開示された共通テストの「モデル問題」，「モニター試験」，「試行調査」といったものをもとに作成しているケースが多い。しかし，上記の確率の問題のようなものも，共通テストで出題される可能性はある。すなわち，「どのような出題のされ方であっても，それに振り回されずに解答する力」を身につけることがより一層大事になる。ちなみに，模試作成においては，このようなことを踏まえて，試行調査などにはなく，また，過去のセンター試験でもみられないような問題を作成しているところはそれなりにあるようだ。そのような問題を参考にして生徒への指導にあたることも，共通テストの出題形式に左右されないようにする一つの手かもしれない。

＜数学 IA ＞

2020 年の IA の出題も例年と同じく第１，２問が数学 I の問題で必答問題，第３～５問は数学 A の問題で３題中２題の選択である。出題分野は以下のようになっている。

第１問	[1]	数と式 (10 点)
	[2]	集合と論理 (8 点)
	[3]	二次関数 (12 点)
第２問	[1]	三角比 (15 点)
	[2]	データの分析 (15 点)
第３問		確率 (20 点)
第４問		整数の性質 (20 点)
第５問		図形の性質 (20 点)

平均点は 51.88 点と，昨年度の 59.68 点より低くなっただけではなく，現行課程になってからのセンター試験では最も低い。得点分布をみても，すべての成績層で，現行課程の他のどの年よりも得点が取れていない。具体的には，点数の第３四分位数が約 65 点で，現行課程ではこれまででこの値が最も低かった 2016 年の約 70 点より

もさらに５点ほど低い。点数の第３四分位数は上位 25% の受験者の最低点である。数学 IA の受験者数 382,151 人であるので，この 25%は約 95,500 人である。センター試験を受けた上で，国公立大学に合格する人数が約 10 万人であるから，「国公立大学へ行くためには数学 IA は７割から８割はとらないといけない」というわけでもない年になってしまったということとなる。なお，ここ 10 年（2011 ～ 2020 年）の中でみると，2020 年の得点分布は，すべての学力層で点数が取りづらかった 2013 年の得点分布に近い。ところで，共通テストの対策としてセンター試験を解く際に，点数の第３四分位数の大きい順，すなわち，国公立大学を目指す場合に「得点を取りやすい順」に解いてみるのも一つの手ではなかろうか。現行課程に入ってからの数学 IA の点数の第３四分位数は大きい順に，2017 年，2015 年，2018 年，2019 年，2016 年，2020 年である。また，センター試験の過去問を解く際には，「まず，マークシートを塗りながら 60 分間解く。60 分経ったら，そこからはマークシートを塗らずに最後まで解ききる。」ということを私は受験生に推奨している。これらを終えた後，マークシートに塗られたものをもとに答え合わせをすることで現状での得点がわかり，「時間無制限で最後まで解ききれるかどうか」でその分野の内容がアタマに入っているかどうかを把握できる。毎回，過去問を 60 分間だけ解いて，すぐに答え合わせをしてしまうと，後半の問題がすべて解答を読むだけとなってしまい，無駄になってしまう。一つ一つの過去問を有効活用するには，上記のような方法が有効だと思われる。

個別の問題についてみていく。必答問題の第１問については，[3] の２次関数の配点が高い上に [3] の後半は正答率が急激に下がっている。具体的には，[3] の最初，グラフ G を表す２次関数を求めるのは正答率が６割であるのに対し，その次の G と y 軸に平行な線分（$x=3$ かつ $-3 \leqq y \leqq 0$）が共有点をもつような c の値を求めるという問題では正答率が約 25％に急落し，最後の問題では正答率は２割を切る。また，第２問 [1] も後半から正答率が急激に下がり，最後は正答率２割である。一方，第２問 [2] のデータの分析は，最初の問題の正答率が低い。

> 99 個の観測値からなるデータがある。四分位数について述べた記述で，どのようなデータでも成り立つものは $\boxed{コ}$ と $\boxed{サ}$ である。
> ⓪　平均値は第１四分位数と第３四分位数の間にある。
> ①　四分位範囲は標準偏差より大きい。
> ②　中央値より小さい観測値の個数は 49 個である。
> ③　最大値に等しい観測値を１個削除しても第１四分位数は変わらない。
> ④　第１四分位数より小さい観測値と，第３四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値の個数は 51 個である。
> ⑤　第１四分位数より小さい観測値と，第３四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しい。
> （2020 年度 大学入試センター試験　数学Ⅰ・A　第２問［2］）

正解は③と⑤であるが，③を答えられた割合は１割強である。逆に，②，④を答えてしまった割合がそれぞれ約 45％と約 30％も高い。②については，中央値となる観測値が１つだけであれば正しいが，複数ある場合には「中央値より小さい観測値」は 49 個よりも小さくなる。④も同様に「その値となる観測値が複数ある場合に問題が生じる」というものである。文章を正確に読み取る力が問われた問題ではあるが，そこまで考えて読まなかった受験生が多かったため，このような正答・誤答率が生じたと考えられる。

選択問題の第３問については，先にも触れたが，最初の [1] が次の４つから正しいものを２つ選ぶ問題である。

> ⓪　１枚のコインを投げる試行を５回繰り返すとき，少なくとも１回は表が出る確率を p とすると，$p>0.95$ である。
> ①　袋の中に赤球と白球が合わせて８個入っている。球を１個取り出し，色を調べてから袋に戻す

試行を行う。この試行を５回繰り返したところ赤球が３回出た。したがって，１回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{3}{5}$ である。
②　箱の中に「い」と書かれたカードが１枚，「ろ」と書かれたカードが２枚,「は」と書かれたカードが２枚の合計５枚のカードが入っている。同時に２枚のカードを取り出すとき，書かれた文字が異なる確率は $\dfrac{4}{5}$ である。
③　コインの面を見て「オモテ(表)」または「ウラ(裏)」とだけ発言するロボットが２体ある。ただし，どちらのロボットも出た面に対して正しく発言する確率が 0.9，正しく発言しない確率が 0.1 であり，これら２体は互いに影響されることなく発言するものとする。いま，ある人が１枚のコインを投げる。出た面を見た２体が，ともに「オモテ」と発言したときに，実際に表が出ている確率を p とすると，$p \leqq 0.9$ である。
(2020 年度 大学入試センター試験　数学Ⅰ・A　第３問［1］)

正解は⓪，②であり，⓪～②までで正しく正誤判断ができれば，試験時間中の対応としては③を考える必要がない。しかし，③を選んでいる割合が約 45％もあるので，③に手を付けた，あるいは，⓪～②でわからないので，とりあえず③をマークしたという可能性もある。①は問題をよく読み，確率とは何かがわかっていれば違うと判断できるが，⓪，②は実際に計算をしてみないとわからない。簡単な計算ではあるが，手際よくできるかどうかが問題である。ここで時間を取ってしまったからか，後半の[2]では，最後の(3)，(4)が正答率１割前後とかなり低くなっている。なお，[1]の③のような問題は，試験中には上記のような対応を取らないと試験時間内に高得点を取ることが困難になるが，普段の勉強においては，じっくり解いてみると良い問題である。

ちなみに，前半の必答問題で，正答率が低かったり，考えるのに時間を要する問題が多いと，後半の選択問題に時間を使えずに，より一層，全体的な得点が低下するという傾向がある。2020 年の数学 IA は，このような傾向の問題であったとも考えられる。

＜数学 IIB＞

2020 年の IIB の出題も例年と同じく第１，２問が数学Ⅱの問題で必答問題，第３～５問は数学Ｂの問題で３題中２題の選択である。出題分野は以下のようになっている。

第１問 [1] 三角関数(15 点)
　　　　[2] 指数関数・対数関数(15 点)
第２問 微分積分(30 点)
第３問 数列(20 点)
第４問 ベクトル(20 点)
第５問 確率・統計(20 点)

平均点は 49.03 点と，昨年度の 53.21 点よりも低い。細かい得点分布をみても，昨年度に比べてすべての成績層で点数が取れていない。なお，昨年度よりも平均点の低かった 2018 年(平均点 51.07 点)のものと比べても，すべての成績層で点数が取れていない。現行課程で２番目に平均点の低かった 2016 年(平均点 47.92 点)と比べると，上位 10％は 2020 年の方が点が取れておらず，それより下位では 2020 年の方が点が取れている。ちなみに，数学 IIB の受験者数が 339,925 人であるので，25％は約 85,000 人となる。現行課程に入ってからの数学 IIB の点数の第３四分位数は大きい順に，2017 年，2019 年，2018 年，2020 年，2016 年，2015 年である。数学 IA 同様，国公立大学を目指す場合，この順で解いていくことで，点の取りやすいものから順に解けるということとなる。

個別の問題について，大きな傾向としては例年通りである。必答問題の数学Ⅱについては，上記のように三角関数，指数対数，微分積分をテーマとした問題が出題されている。ただし，それ以外の数学Ⅱのいろいろな式，図形と方程式はテーマ分けだけを見ると出題されていないようにみえるが，今年については第１問[1]の中で２次方程式の解と係数の関係(いろいろな式)，[2]の中で領域と最大最小(図形と方程式)の内容が問われている。なお，共通テストにおいても，必答問題が数学Ⅱ，選択問題が数学Ｂの分類となる流れは変わらないと考えられるが，例えば 2018 年の

試行調査では，必答問題のうちの第２問が図形と方程式をテーマとしたものになっており，これまでの「第１問は三角関数・指数対数，第２問は微分積分」という枠にとらわれない出題がされる可能性も高い。すべての分野を網羅するのが大変だからということで，分野を絞って学習をしてしまう受験生が見受けられるが，数学 IIB は共通テストだけでよいからといって，今までのセンター試験同様に数学 II で三角関数，指数対数，微分積分だけに絞ってしまうと，かなりリスクが高いと考えられる。

具体的な問題として，第１問 [2] をみてみる。

(1)　t は正の実数であり，　$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}},\quad t-t^{-1}=\boxed{\text{トナニ}}$$

である。

(2)　x，y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3\left(x\sqrt{y}\right)\leqq 5 & \cdots\cdots② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

について考える。

$X=\log_3 x$，　$Y=\log_3 y$ とおくと，②は

$$\boxed{\text{ヌ}}X+Y\leqq\boxed{\text{ネノ}}\quad\cdots\cdots④$$

と変形でき，③は

$$\boxed{\text{ハ}}X-Y\geqq\boxed{\text{ヒフ}}\quad\cdots\cdots⑤$$

と変形できる。

X，Y が④と⑤を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。また，　x，y が②，③と $\log_3 y=\boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

（2020 年度 大学入試センター試験　数学Ⅱ・B　第１問［２］）

まず，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ の両辺を２乗することで，$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}$ の値を求められ，これと $t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$ であることから，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}$ の値も求められる。また，$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ の関係から $t-t^{-1}$ の値を求めるという流れである。指数対数の典型的な処理の仕方であるので，$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}$ と $t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}$ の値の正答率はそれぞれ，約 65％と６割弱と高いが，$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ の関係を使えなかったのか，$t-t^{-1}$ の値の正答率は３割と半減している。(2) は，④，⑤の導出はそれぞれ正答率が７割強であるが，残りの２つの正答率がそれぞれ３割弱と約１割というかなり低い結果となっている。XY 平面において，④と⑤のそれぞれの境界線となる２直線の交点が，$\left(X,\ Y\right)=\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{38}{5}\right)$ で，この Y を越えない最大の整数が求める値となり，また，その結果である $Y=7$ を④，⑤に代入することで，X の範囲，さらには，整数 x の範囲も求められる。

この正答率を考えると，指数対数の問題においては「指数対数で扱うもの」のみが出題されていれば，正答率が６割を超えてくるが，それ以外の分野のことが出てくると，途端に正答率が下がることがわかる。(1) の最後については，$t^{\frac{1}{3}}$ を３乗すれば t になるというところに気がつかない受験生が多いということであろう。

ところで，指数対数の分野については，2015 年のセンター試験において，「指数対数の分野の問題で手こずったために，平均点が大幅に下がったのではないか」という可能性がある。2015 年の数学 IIB は現行課程のみならず，旧課程と合わせても最も平均点が低い (４割を切る 39.31 点)。問題を解いてみると，2012 年のように計算量が多いわけでもない。そこで，問題別の正答率などを調べてみたところ，第１問 [2] の指数対数の問題で，最初の問いからして正答率が５割を切っていることがわかった。普通ならば，中問の最初の問題は正答率が７割を超える程度はある。2015 年の指数対数は最初に「３乗根」が出てくるが，このことから，これらの扱いに慣れていなかった受験生が多かったと考えられる。2015 年より前の過去問では，指数対数で最初からそこまで難儀する問題は出されていなかったこともあり，「指数対数で点が取れないはずがない」としがみついてしまって，時間をロスした受験生も多かったと思われる。その結果として，第２問，第３問，第４問のいずれの問題も，最後の問題でマークをし

ていない割合が6割前後となっている。つまり，6割の受験生が，3つの大問のすべてにおいて，最後までたどり着けていないということである。数学 IA のところでも書いたとおり，前半の問題で正答率が低かったり，答えるのに時間がかかる問題があると，後半の問題にかなり影響が出る。特に数学 IIB は「時間が足りない」というのはよく知られていることである。2015 年の数学 IIB は，この影響が物凄く出た典型例といえる。また，指数対数については，三角関数に比べると，受験生における扱いが低いように思われる。数学 III まで学習をする場合には，微分積分の計算で，指数対数はかなり扱い慣れている受験生も増えるのだが，数学 IIB までの受験生においては，指数対数はどうしても軽くなる。2020 年の上記の問題も，2015 年のときの問題も，「指数対数を軽くしか学習していなかった」ということの弊害が出てしまっているのではないだろうか。

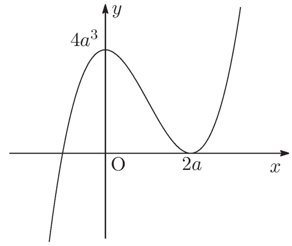
・大学の個別入試

難しい問題が並んだり，逆に比較的解きやすい問題ばかりが並んだりするという極端な傾向は，近年では少なくなり，どちらかというと，難問が少し，普通の問題が数題，簡単な問題が 1 題，といった感じのバランスで出されるようなことが各大学で増えてきたように思う。しかし今年は，難問も「かなりの難問」を出題してきた大学もある。こういった中で，問題を見極め，解ききれるものをしっかりと解くことがより一層大事になってくる。東京大学の文科の入試の場合，第 1 問がその「確実に点を取っていく問題」にあたる。

> $a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線
> $$C: y=x^3-3ax^2+b$$
> が，以下の 2 条件を満たすとする。
> 条件 1：C は x 軸に接する。
> 条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。
> b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。
> （2020 年度 東京大学 前期 数学（文科）第 1 問）

$y'=0$ となる x が 0 と $2a$ と求まり，条件 1 と $b>0$ から，$x=2a$ で C が x 軸と接することがわかり，$b=4a^3$ が求められる。

このことから，C は次のようなグラフになる。



条件 2 より，C と x 軸で囲まれた領域の境界を除いた部分での格子点が 1 個だけである。もしこの格子点が y 軸上の $(0,\ 1)$ でないとすると，$4a^3<1$ となり，領域の中で y 座標が整数となる点が存在しなくなる。これより，$(0,\ 1)$ のみを含めるということから，
$1<4a^3\leqq 2$ が必要となり，あとは，このときに $(0,\ 1)$ 以外の格子点 $(1,\ 1)$ などが領域の中に入らないことを示せばよい。

また，複素数平面を絡めた問題ではあるが，京都大学理系の第 1 問も確実に取りたい問題である。

> a，b は実数で，$a>0$ とする。z に関する方程式
> $$z^3+3az^2+bz+1=0 \quad (*)$$
> は 3 つの相異なる解を持ち，それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする。このとき，a，b と（$*$）の 3 つの解を求めよ。
> （2020 年度 京都大学 前期 数学（理系）第 1 問）

（$*$）が実数係数の 3 次方程式であり，「3 つの相異なる解を持ち」とあり，3 つの解がいずれも実数であるとすると正三角形の頂点とはならないので，この 3 解は $z=\alpha,\ \bar{\alpha},\ c$（$\alpha$ は虚数，c は実数）とおける。この時点で，この正三角形の 3 頂点は，実軸上に 1 つ，残りの 2 つは実軸に関して対称な 2 点となる。また，3 次方程式の解と係数の関係から，$\alpha+\bar{\alpha}+c=-3a$

$$\therefore \frac{\alpha+\bar{\alpha}+c}{3}=-a$$

となり，正三角形の重心は実軸上の点 $-a$ であることがわかる。また，一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三

角形の外接円半径は a であるので，$c=0$ または $c=-2a$ であることもわかる。あとはそれぞれの場合について，調べていけばよいこととなる。

ここまで国立大学の問題を挙げてみたが，私立大学の問題，とりわけ文系の数学の問題も取り上げてみたい。

Ⅱ．座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円上の動点 A，B，C を考える。以下，A が $(1,\ 0)$，B が $(0,\ 1)$，C が $(-1,\ 0)$ にいる状態を初期状態と呼ぶ。

8 枚の硬貨 Q_1，Q_2，Q_3，…，Q_8 を同時に投げる試行を T とする。A，B，C はいずれも，試行 T を行うたびに次の規則に従って動く。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$ に対して，

$\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n}{4}\pi\right)$ にいる動点は，硬貨 Q_n が表となったとき $\left(\cos\dfrac{n+1}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n+1}{4}\pi\right)$ に動き，硬貨 Q_n が裏となったとき $\left(\cos\dfrac{n-1}{4}\pi,\ \sin\dfrac{n-1}{4}\pi\right)$ に動く。

この規則により，ある時点で座標が一致している複数の動点は，試行 T の後も座標が一致する。

(i)　初期状態から試行 T を 2 回行ったとき，A と B の座標が一致してる確率は $\dfrac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ であり，A と C の座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である。

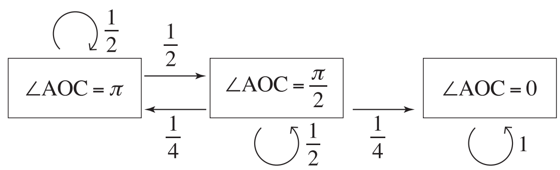
また，A，B，C の座標が全て一致している確率は $\dfrac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)\,(32)}}$ である。

(ii)　初期状態から試行 T を 2 回行ったとき，A と B の座標が一致しているとする。このとき，C の座標が A, B の座標と一致している確率は $\dfrac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}$ である。

(iii)　初期状態から試行 T を 4 回行ったとき，A と C の座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(35)\,(36)}}{\boxed{(37)\,(38)}}$ である。

(iv)　初期状態から試行 T を 5 回行ったとき，A と C の座標が一致している確率は $\dfrac{\boxed{(39)\,(40)}}{\boxed{(41)\,(42)}}$ である。　（2020 年度 慶應義塾大学商学部 A 方式　第 2 問）

慶應義塾大学の経済学部，商学部においては数学のある A 方式と，ない B 方式がある。本来であれば，経済などをしっかりと学ぶ上では，数学が必要である。この問題は商学部の第 2 問であるが，2020 年は慶應の経済も商も数学の難易度が高く，しっかりと数学を勉強している学生がほしいというアピールなのかもしれない。この問題は，(i) を考えていくときは，各点がどこに動くのかを考えれば良いが，(iii) 以降になるとそれも大変になる。途中で，「どの位置にいるか」ではなく「∠AOC がどのように推移していくか」を考えると，実は解きやすい。



実際に，∠AOC の推移は上図のようになり，後は漸化式を立てて計算をしていけば求められる。

・最後に

2021 年度入試は，共通テストという新しいテストを迎える予定の上に，新型コロナウイルスの影響で，授業進度や試験会場などの問題が出てくることとなった。逆に，一人で学習をしなければならない時間が増えるようになったことから，受験生にとっては「じっくり時間を掛けて考える」ことが可能となった。この「自分で使える時間」をどれだけ有効に使えるか，ということで今度の入試は物凄く差が出てくると思われる。一方の我々としては，なによりも 2021 年度入試が滞りなく実施できることを祈るしかない。