

平面上の点と直線の距離の公式を空間で考える

～ $\sqrt{a^2+b^2}$, $|ax_1+by_1+c|$ の意味がわかる証明～

山口県立光高等学校教諭 西元教善

1. はじめに

平面上の点と直線の距離の公式, つまり
 ≪点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は,
 $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。≫

は, 数学Ⅱの2章「図形と方程式」の1節「点と直線」で扱う。

2直線の垂直条件を扱った後にその公式が出てくるのであるが, 証明の理解や公式の暗記, 公式を適用する場面の判断に苦労する生徒は少なくない。

特に, 公式の中の $\sqrt{a^2+b^2}$ や $|ax_1+by_1+c|$ の意味やどうしてこのような式が現れるのかがよくわからないようである。

中には $ax+by+c=0$ より $ax_1+by_1+c=0$ と考えて, 混乱する生徒さえいる。

教科書の解説ではいろいろと工夫された証明が提示されているが, 1ページ以上を要するために, 数学の苦手な生徒はその計算をフォローすることさえ困難なこともある。いや, 数学が比較的できるとされる生徒でも大変そうである。

もっと簡単で, $\sqrt{a^2+b^2}$, $|ax_1+by_1+c|$ の意味を含めてわかりやすい証明はないのか……と教える側も考えるのであるが, なかなかそのような証明が見つからない。

平面上の点と直線の距離であるから平面で考えなければならないという制約を外せば, つまり空間における xy 平面上での点と直線の距離を考えるとすれば, $\sqrt{a^2+b^2}$, $|ax_1+by_1+c|$ の意味がわかりやすい証明があるので, 本稿では, 空間のベクトル, 空間における平面の方程式, 法線ベクトル等を理解しているという前提で考察してみたい。

2. 空間で考える～点 $(x_1, y_1, 0)$ と平面 $z=ax+by+c$ と xy 平面の交線の距離～

方程式 $ax+by+cz+d=0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) が空間における平面を表すことは発展扱いになっているが, これを扱っておけば, 方程式

$z=ax+by+c \Leftrightarrow ax+by-z+c=0$ は空間における平面を表すことになる。ここで, この平面を α とする。また, ベクトル $\vec{n}=(a, b, c)$ は平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線ベクトルであることも扱っているとしよう。

さて, $f(x, y)=ax+by+c$ とすると, $f(x_1, y_1)=ax_1+by_1+c$ であるから, $z_1=f(x_1, y_1)$ とすれば, 点 (x_1, y_1, z_1) つまり点 $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ は平面 α 上の点であり, ax_1+by_1+c はその点の z 座標を表す。(図1)

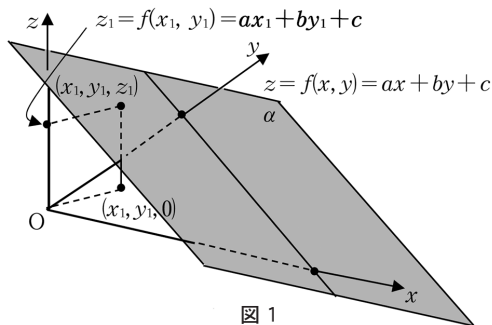


図 1

ここで, $P(x_1, y_1, 0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ とする。また, $(a, b) \neq (0, 0)$ とすると平面 $z=ax+by+c$ は xy 平面と交わって, 直線 ℓ をつくる。この直線 ℓ の方程式は $ax+by+c=0$ である。

このとき, P から直線 ℓ に垂線 PH を引くと, PH の長さが点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d である。また, xy 平面上の直線 $ax+by+c=0$ 上にない点 $P(x_1, y_1, 0)$ と, P を通り z 軸に平行な直線と平面 $z=ax+by+c$ との交点 Q の距離が $|ax_1+by_1+c|$ である。(図2)

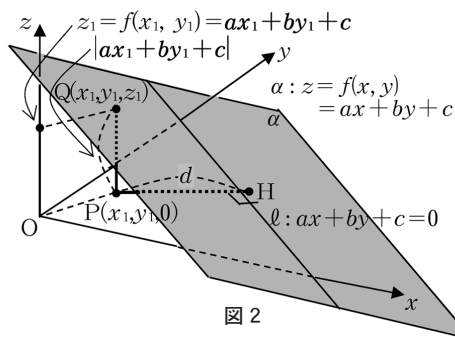


図2

xy平面上において、直線 $l: ax + by + c = 0$ の法線ベクトル (の1つ) $\vec{n}_1 = (a, b)$ であるから、 k を実数として $\vec{PH} = k\vec{n}_1 = k(a, b)$ と表せる。

よって、xyz空間においては、 $\vec{PH} = k(a, b, 0)$ である。そこで、 $\vec{n}_1 = (a, b)$ を $\vec{n}_1 = (a, b, 0)$ と考える。また、 $\vec{PQ} = (0, 0, z_1)$ である。

よって、 $\vec{QH} = \vec{PH} - \vec{PQ} = k(a, b, 0) - (0, 0, z_1) = (ka, kb, -z_1)$ である。また、直線 QH は平面 $z = ax + by + c \Leftrightarrow ax + by - z + c = 0$ 上にあり、平面 $z = ax + by + c$ の法線ベクトル $\vec{n}_2$ が $\vec{n}_2 = (a, b, -1)$ であることから、 $\vec{QH} \cdot \vec{n}_2 = 0$

つまり $ka^2 + kb^2 + z_1 = 0$ である。

よって、 $z_1 = -k(a^2 + b^2)$ である。

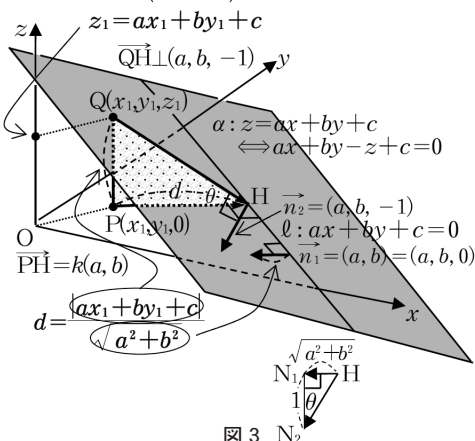


図3

したがって $|z_1| = |k|(a^2 + b^2)$ 、 $a^2 + b^2 \neq 0$ より

$$|k| = \frac{|z_1|}{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2} \text{ である。}$$

$$d = PH = |\vec{PH}| = |k|\sqrt{a^2 + b^2} \text{ であるから、}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ となる。}$$

これより、xyz空間において、点 $P(x_1, y_1, 0)$ から直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は $P(x_1, y_1, 0)$

と平面 $z = ax + by + c$ 上の点 $Q(x_1, y_1, z_1)$ の距離 $PQ = |z_1| = |ax_1 + by_1 + c|$ を直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトル $\vec{n} = (a, b)$ の大きさ $\sqrt{a^2 + b^2}$ で割ったものに等しいといえる。(図3)

もう少し補足しておこう。

$\triangle PHQ$ において、 $\angle PHQ = \theta$ とし、

$\vec{HN}_1 = \vec{n}_1 = (a, b, 0)$ 、 $\vec{HN}_2 = \vec{n}_2 = (a, b, -1)$ とすると、 $HN_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ 、また、 $\vec{N}_1\vec{N}_2 = (0, 0, -1)$ であるから $N_1N_2 = 1$

また、 $\angle QHN_2 = 90^\circ$ 、 $\angle HN_1N_2 = 90^\circ$ であるから、 $\angle N_1N_2H = \theta$ よって、 $\triangle PHQ \sim \triangle N_1N_2H$

$$\text{したがって、} \frac{PH}{PQ} = \frac{N_1N_2}{N_1H} \text{ (図4)}$$

$$\text{すなわち、} \frac{d}{|ax_1 + by_1 + c|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{以上から、} d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ である。}$$

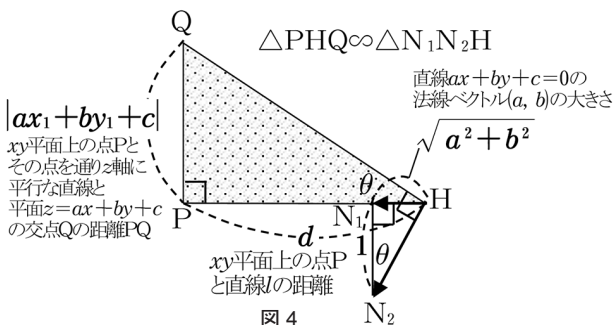


図4

3. 教科書で扱ってある一般的な証明との比較

教科書で扱っている証明は、概ね次の2つのタイプといえる。

① 原点と直線の距離を垂直条件と2点間の距離の公式で先に求めておき、点と直線をとともに点が原点に重なるように平行移動して、その結果を利用して求める。

② 垂直条件から点 (x_1, y_1) から直線に下ろした垂線の足 (x_2, y_2) について $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = k(a, b)$ として、 k を x_1, y_1, a, b, c で表し (このとき $ax_1 + by_1 + c$ が現れる)、2点間の距離の公式で求める。ただし、このようなベクトル表記ではないが、実質的に同じである。

②による証明と③本稿での証明を比較しながら

証明すると次のようになる。

②による証明

直線 $l: ax+by+c=0$ ($ab \neq 0$) 上にない点を $P(x_1, y_1)$ とする。また、点 P から下ろした垂線の足を $H(x_2, y_2)$ とすると、点 P と直線 l の距離 d は垂線 PH の長さであるから、

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdots \cdots ① \text{ である。}$$

$$PH \perp l \text{ より } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

$$\text{つまり } \frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b}$$

$$\text{ここで, } \frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = k \cdots \cdots ② \text{ とおくと}$$

$$x_2 = x_1 + ka, \quad y_2 = y_1 + kb \cdots \cdots ②' \text{ である。}$$

$H(x_2, y_2)$ は $l: ax+by+c=0$ 上の点であるから、 $ax_2+by_2+c=0$ を満たす。②' を代入して、

$$a(x_1 + ka) + b(y_1 + kb) + c = 0$$

$$\text{よって, } k(a^2 + b^2) + (ax_1 + by_1 + c) = 0$$

* ここで、 $ax_1 + by_1 + c$ が出現するが、その意味は不明である。

$$\text{これより, } k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \cdots \cdots ③$$

$$② \text{ より } x_2 - x_1 = ka, \quad y_2 - y_1 = kb \cdots \cdots ②''$$

②'' を①に代入して

$$d = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = |k| \sqrt{a^2 + b^2} \cdots \cdots ④$$

③を④に代入して

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

③本稿での証明

直線 $l: ax+by+c=0$ 上にない点を $P(x_1, y_1)$ とする。また、点 P から下ろした垂線の足を H とすると、直線 l の法線ベクトルは (a, b) より $\overrightarrow{PH} = k(a, b)$ とおくと点 P と直線 l の距離 d は垂線 PH の長さであるから、 $d = |k| \sqrt{a^2 + b^2} \cdots \cdots ①$ である。

* ここで $\sqrt{a^2 + b^2}$ が、直線 $l: ax+by+c=0$ の法線ベクトル (の 1 つ) である $\vec{n} = (a, b)$ の大きさという意味を伴って出現する。

xyz 空間で考えると、 $P(x_1, y_1, 0)$ であり直線 l

は平面 $z = ax+by+c$ と xy 平面: $z=0$ との交線である。点 $Q(x_1, y_1, z_1)$ ($z_1 = ax_1 + by_1 + c$) は、平面 $z = ax+by+c$ と、点 $P(x_1, y_1, 0)$ を通り、 z 軸に平行な直線との交点である。

* ここで $|ax_1 + by_1 + c|$ が、 xy 平面上の直線 $l: ax+by+c=0$ 上にない点 $P(x_1, y_1, 0)$ と、この点を通り z 軸に平行な直線と平面 $z = ax+by+c$ との交点 Q の距離という意味を伴って出現する。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (0, 0, z_1) \text{ であるから} \\ \overrightarrow{QH} &= \overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PQ} = k(a, b, 0) - (0, 0, z_1) \\ &= (ka, kb, -z_1) \end{aligned}$$

QH は、法線ベクトル $\vec{n}$ が $\vec{n} = (a, b, -1)$ である平面 $ax+by-z+c=0$ 上にあるから、 $\overrightarrow{QH} \cdot \vec{n} = 0$ 、 $\overrightarrow{QH} \cdot \vec{n} = (ka, kb, -z_1) \cdot (a, b, -1) = ka^2 + kb^2 + z_1$ より、 $ka^2 + kb^2 + z_1 = 0$ である。

$$\text{よって } z_1 = -k(a^2 + b^2) \quad a^2 + b^2 \neq 0 \text{ より,}$$

$$k = -\frac{z_1}{a^2 + b^2} = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \cdots \cdots ②$$

①, ②より

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ である。}$$

4. まとめ

教科書の証明と本稿の証明の大きな違いは公式の分母・分子にある $\sqrt{a^2 + b^2}$ 、 $|ax_1 + by_1 + c|$ のグラフ上の意味がわかることである。②の証明では $ax_1 + by_1 + c$ のもつ意味がわからないまま、単なる計算過程の中で出現しているが、③の証明では空間で考えることにより、 $ax_1 + by_1 + c$ は平面 $z = ax+by+c$ と、点 $(x_1, y_1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線との交点の z 座標であることがわかる。

また、ベクトルで考えることで平行や垂直が簡単に扱え、若干であるが計算が楽になる。

教科書では同じ内容を別の分野で再度取り上げることは少ないが、その分野のよさを理解させるためにも既習事項を取り上げるといわゆる「関係的理解」がより拡充されるので望ましいと思われる。本稿での考察はそのような一例である。