内容解説資料

じっきょう
数学資料 No. 80

巻頭 探究的な学習にもとづく数学の授業をめざして

静岡大学学術院教育学領域　教授　熊倉啓之

1．はじめに

2018 年 3 月に告示された高等学校学習指導要領では，理数科を新設して,「理数探究」「理数探究基礎」という探究的科目が新たに設置されることとなった。中央教育審議会答申（2016）には，この新教科・科目の基本原理が，次のように記述されている。

> 様々な事象に対して知的好奇心を持つとともに，教科・科目の枠にとらわれない多角的，複合的な視点で事象を捉え,「数学的な見方・考え方」や「理科の見方・考え方」を豊かな発想で活用したり，組み合わせたりしながら，探究的な学習を行うことを通じて，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力の基礎を培う。

ここで，注目すべきは,「知的好奇心」であり「新たな価値の創造」であり「粘り強く挑戦する」という表現である。AI 技術が急速な進歩を遂げる時代において，人間として身につけるべき資質・能力が問われる中で，「知的好奇心を持って，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力」を育成することは，大いに意義のあることであるといえよう。

しかし，教師の問題解法の解説を聞いて理解し，解法をひたすら覚えるだけの学習では，「粘り強く挑戦する」力は育成されない。また，教師から与えられた問題－すなわち解が存在することがあらかじめ保証されている問題－を解決するだけでは，仮に問題解決に主体的に関わったとしても,「新たな価値の創造」には向かわない。そして，数学を学習することへの「知的好奇心」は生じにくいであろう。

知的好奇心を持って，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力を育成するためには,「探究的な学習」が不可欠である。そして，その探究的な学習を実現するための科目として，新科目「理数探究」が期待されているといえよう。

2．探究的な学習の課題例

以下では，探究的な学習を可能とするいくつかの課題例を挙げる。

(1)　図形の面積公式（熊倉，2019）

小学校算数科では，三角形の面積が (底辺)×(高さ)÷2 で求められることを学習する。それをもとに，数学Ⅰの「図形と計量」では，三角比を

もくじ

用いて，２辺の長さ a，b，そのはさむ角 θ の三角形の面積 S が，次の式で表されることを学習する。

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

これを発展させて，次の課題が考えられる。

【課題 1】与えられた条件が異なるときに，三角形の面積公式を作ろう。

この課題の解答として，次が挙げられる。

ア　３辺 a，b，c が与えられたとき

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ただし，$2s=a+b+c$

イ　１辺 a と両端の角 α，β が与えられたとき

$$S=\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

アは，よく知られたヘロンの公式である。

続いて，小学校算数科で学習した平行四辺形やひし形，台形などの面積公式を振り返りながら，次の課題を探究することが考えられる。

【課題 2】三角比を使って，いろいろな図形の面積公式を作ろう。

例えば，次のような解答が考えられる。

ウ　平行四辺形（2 辺 a，b，角 α）

$$S=ab\sin\alpha$$

エ　等脚台形（上底 a，下底 b，底角 α）

$$S=\frac{\left|b^2-a^2\right|\tan\alpha}{4}$$

オ　台形（上底 a，下底 b，底角 α，β）

$$S=\frac{\left|b^2-a^2\right|\tan\alpha\tan\beta}{2(\tan\alpha+\tan\beta)}=\frac{\left|b^2-a^2\right|\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

カ　台形（上底 a，下底 b，脚 c，はさむ角 α）

$$S=\frac{1}{2}(a+b)c\sin\alpha$$

キ　四角形（3 辺 a，b，c，はさむ角 α，β）

$$S=\frac{1}{2}\left\{ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ca\sin(\alpha+\beta)\right\}$$

さらには，五角形，六角形，…の面積公式を作る発展課題も考えられよう。

(2)　当たりを引く確率（山本他，2017）

数学Ａの「確率」で学習する条件付き確率の活用として，次のような問題がある。

【原題】10 本中３本の当たりがあるくじを，２つの袋に５本ずつ，当たりくじは２本と１本に分けて入れる。まずどちらかの袋を選んだ上で，選んだ袋から１本引くとき，当たりくじを引く確率を求めよ。

この問題の解答は，次の通り，２つの袋に分けても同じ確率となる。

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

当たりくじの分け方を，３本と０本にしても，確率は変わらない。これらを踏まえ，次の課題を探究することが考えられる。

【課題 1】10 本を，６本と４本に分ける場合はどうか。

この結果は，次のように確率が変化する。

ア　当たりくじを０本と３本に分ける場合

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{0}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

イ　当たりくじを１本と２本に分ける場合

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$$

ウ　当たりくじを２本と１本に分ける場合

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$$

エ　当たりくじを３本と０本に分ける場合

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{0}{4}=\frac{1}{4}$$

最大の確率は $\frac{3}{8}$，最小の確率は $\frac{1}{4}$ である。そこで，次の課題を探究することが考えられる。

【課題 2】できるだけ確率を大きくするには，どのようにくじを分ければよいか。また，できるだけ確率を小さくするには，どのように分ければよいか。

確率が最大となるのは，９本と１本に分け，当たりを２本と１本に分けた場合である。

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{11}{18}$$

また，確率が最小となるのは，９本と１本に分け，当たりを３本と０本に分けた場合である。

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{0}{1}=\frac{1}{6}$$

さらに，**課題 2** を発展させて，次のような**課題 3**，**課題 4** を探究することが考えられる。

【課題 3】袋の数を３つにしたら，確率が最大・最小になるのはどのような場合か。
【課題 4】袋の数をさらに増やしてもよいとしたら，確率が最大・最小になるのはどのような場合か。

課題 4 の結果は，次の通りである。

確率が最大となるのは，袋の数を４つにして，７本，１本，１本，１本に分け，当たりを０本，１本，１本，１本に分けた場合である。

$$p=\frac{1}{4}\times\frac{0}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

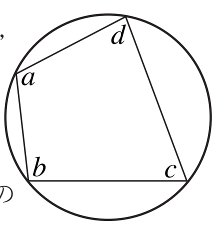
また，確率が最小となるのは，袋の数を５つにして，６本，１本，…，１本に分け，当たりを３本，０本，…，０本に分けた場合である。

$$p=\frac{1}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{0}{1}+\cdots+\frac{1}{5}\times\frac{0}{1}=\frac{1}{10}$$

（袋の数を６つにしても同じ確率が得られる。）

さらには，くじの本数を一般化した場合を探究する活動も考えられよう。

(3)　内接四角形の性質（熊倉，2018）

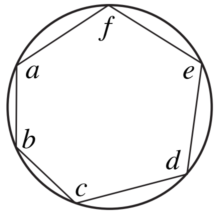


数学Ａの「図形の性質」で，円に内接する四角形について，次の性質を学習する。

$$a+c=b+d=180°$$

この性質を発展させて，次の課題を探究することが考えられる。

【課題 1】四角形でない場合に，同じような性質はあるだろうか。



四角形の場合から類推して，例えば六角形の場合には，次の性質が見つかる。

$$a+c+e=b+d+f=360°$$

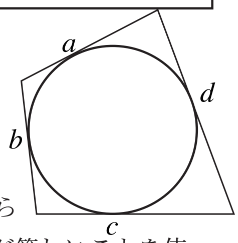
このことは，六角形を１本の対角線で２つの四角形に分割して，内接四角形の性質を利用することで容易に示される。

一般に，$2N$ 角形の場合には，内角を順に a，b，c，d，…とすると，次の性質が成立する。

$$a+c+e+\cdots=b+d+e+\cdots=(N-1)\times180°$$

さらには，内接四角形の性質を発展させて，次のような課題を探究することも考えられる。

【課題 2】円に外接する多角形について，同じような性質はあるだろうか。



角→辺と置き換えることで，例えば，外接四角形の場合は，次の性質が見つかる。

$$a+c=b+d$$

このことは，円外の１点から円に引いた２本の接線の長さが等しいことを使って容易に示される。

内接多角形の場合と同じように一般化すると，$2N$ 角形の場合に，次の性質が成立する。

$$a+c+e+\cdots=b+d+f+\cdots$$

(4)　多面体の角の和（熊倉，2011）

中学校数学科で，多角形の角の和について，次の性質を学習する。

ア　n 角形の内角の和 $=180°\times(n-2)$

イ　n 角形の外角の和 $=360°$

これをもとに，数学Ａの「図形の性質」で扱う多面体の性質に関連させて，次の課題を探究することが考えられる。

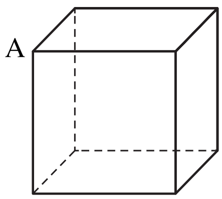
【課題 1】多面体の角の和について，多角形の場合と同じような性質はあるだろうか。

多面体の角としては，２面角や立体角があるが，ここでは次のように多面体の頂点の「内角」と「外角」を定義することとする。

「内角」～頂点に集まる角の和

「外角」$\sim 360° -$「内角」

例えば，立方体の頂点 A の「内角」と「外角」は，次の通りである。



「内角」$= 90° \times 3$

$= 270°$

「外角」$= 360° - 270°$

$= 90°$

この定義で，内角の和と外角の和を求めると，立方体の場合は，次の通りである。

「内角」の和 $= 270° \times 8 = 2160°$

「外角」の和 $= 90° \times 8 = 720°$

他の多面体の場合も調べていくと，一般に，多面体の頂点の数を V として，次の性質が見いだされる。

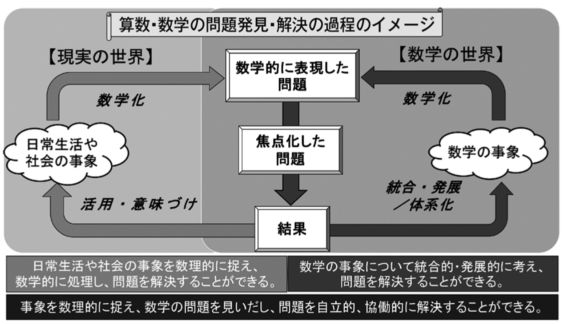
「内角」の和 $= 360° \times (V - 2)$

「外角」の和 $= 720°$

このことは，オイラーの多面体定理を使うことで示される（証明略)。

3．日常の数学の授業における探究的な学習

探究的な学習は,「理数探究」に限ったものではない。日常の数学の授業の中に，探究的な学習があってもよいはずである。平成 30 年告示学習指導要領解説（2018）では，算数・数学の問題発見・解決の過程として，次の図を示している。



この図において，特に「数学の世界」における右側のサイクルが，探究的な学習につながるものといってよい。導いた「結果」を振り返って統合的・発展的に考察し，新たな問題を見いだしてそれを考察，その結果が出たら，再び新たな問題を見いだす，…という一連の活動の過程は，探究的な学習そのものである。

4．おわりに

Chevallard（2015）は，記念碑を次から次へと見物するかのごとくに，定理や公式等を学んでいくような従来型の指導を「記念碑主義」と批判し，それに代わるパラダイムとして「世界探究」を提案して，探究する活動を重視する。AI 時代を生き抜く力を育成する意味でも，今後「探究的な学習」の重要性は一層増すであろう。

2 で挙げた課題例での探究結果は，数学的にはあまり価値がないかもしれないが，探究する活動自身には，教育的価値があると考える。必ずしも高度で抽象的な数学を考察の対象とせずとも，教科書の問題を発展させたり，小学校・中学校で学んだ算数・数学を発展させたりするような課題を探究する活動は，十分に価値があると考える。

「理数探究」において，数学をテーマとした多くの探究活動が行われるとともに，日常の数学の授業の中でも，積極的に探究的な学習が実施されることを期待したい。

＜引用・参考文献＞

Chevallard,Y.(2015),"Teaching Mathematics in Tomorrow′s Society:A Case for an Oncoming Counter Paradigm",The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education,pp.173-187.

熊倉啓之（2011）「高等学校数学の内容　図形」高等学校数学教育研究会編『高等学校数学教育の展開』聖文新社，43-44.

熊倉啓之（2018）「高等学校数学科の新学習指導要領における指導のポイント」中等教育資料 No.988，学事出版，14-17.

熊倉啓之（2019）「数学的活動に基づく高校数学の授業設計」岩崎秀樹・溝口達也編著『新しい数学科指導の理論と実践』ミネルヴァ出版，62-94.

文部科学省（2018）「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」26.

中央教育審議会（2016）「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申)」152.

山本達也・熊倉啓之（2017）「発展的な考え方の育成を重視した確率の教材開発」日本数学教育学会誌 99-3，4-12