ワンポイント教材

ワンポイント教材アーカイブ

無限級数の和の一考察

— $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ の利用—

無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は，第 n 部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ の極限値があれば，その和が存在する。

すなわち，$n\to\infty$ のとき，$S_n\to\alpha$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\alpha$$

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)=\alpha-\alpha=0$$

であるから，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ は，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が存在するための必要条件である。

この必要条件に着目すれば，次のように無限級数の和を求めることができる。

例題 1　次の無限級数の和を求めよ。

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots$$

＜解＞この級数の第 n 項を a_n とすると，

明らかに，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

それで，第 n 部分和を S_n とすると

$$S_{2n+1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=1$$

また，$S_{2n}=S_{2n+1}-a_{2n+1}$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n+1}-a_{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=1$

ゆえに，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$ より無限級数の和は 1 である。

（終）

例題 2　次の無限級数の和を求めよ。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots$$

＜解＞この無限級数の第 n 項を a_n，第 n 部分和を S_n とすると，明らかに $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

また，

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

また，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}+a_{2n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\dfrac{3}{2}$

ゆえに，求める無限級数の和は $\dfrac{3}{2}$ である。

（終）

以上のことからもわかるように，一般に，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ について，k を自然数として，次のことが成り立つ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} S_{kn}=\alpha$ ならば，

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{kn}=\lim\limits_{n\to\infty} S_{kn+1}=\cdots\cdots=\lim\limits_{n\to\infty} S_{kn+k-1}=\alpha$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{kn}=\alpha$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ のとき，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

例題 3　無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin\dfrac{n\pi}{3}$ の和を求めよ。

＜解＞この数式の第 n 項を a_n，第 n 部分和を S_n とすると，$-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{3}\leqq 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{3}=0$$

それで，

$$S_{6n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{6n-5}\right\}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{6n-4}\right\}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{6n-2}\right\}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{6n-1}\right\}$$

より，

$$\lim_{n\to\infty} S_{6n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，求める無限級数の和は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。（終）

このように，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を考える際は，まず $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ を調べ，それをもとに第 n 部分和の極限を求めるよう指導してはどうだろうか。無限級数の和について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を調べることの必要性がより理解されよう。