事象の視覚化を意識した教材

関数の極大値と最大値を視覚化する

生徒は，関数の最大値・最小値を求めるとき，関数を微分し，増減表，グラフを手掛かりに考察することが多い。

一方で，微分法以外の方法で関数のグラフの形状を考察することは，関数のもつ意味を多角的に捉えることに繋がり，ひいては関数を微分することの価値を高めることになると筆者は考えている。

ここでは，次の問題をもとに考察する。

> 関数 $y=x\sqrt{8-x^2}\quad\left(0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}\right)$
> の最大値は $\boxed{}$ となる。

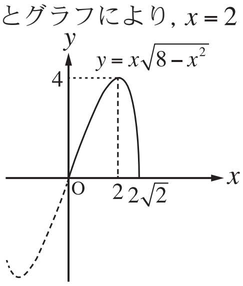
1. $y=x\sqrt{8-x^2}$ を微分する

解　$y'=(x)'\sqrt{8-x^2}+x\left(\sqrt{8-x^2}\right)'$

$$=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ より，増減表とグラフにより，$x=2$ のとき，最大値 4 を得る。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
y'	╳	$+$	0	$-$	╳
y	0	↗	4	↘	0
			最大		



2. 式を変形してみる

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ より，

$$y=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{x^2\left(8-x^2\right)}\qquad\cdots\cdots①$$

とする。

$x^2=t$ とすれば，根号の中の式は，t についての二次関数となる。

$t(8-t)=-(t-4)^2+16\ (0\leqq t\leqq 8)$ となり，

$t=4$ のとき，最大値 16 を得る。ゆえに，$x^2=4$ すなわち $x=2$ のとき，最大値 $\sqrt{16}=4$ を得る。

3. 相加平均と相乗平均の関係を利用する

2. の①で $x^2\geqq 0$，$8-x^2\geqq 0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より次の不等式を得る。

$$\sqrt{x^2\left(8-x^2\right)}\leqq\frac{x^2+\left(8-x^2\right)}{2}=4$$

等号成立は $x^2=8-x^2$ すなわち，$x=2$ のときだから，元の関数は $x=2$ のとき，最大値 4 を得る。

4. 三角関数の利用

$x=2\sqrt{2}\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

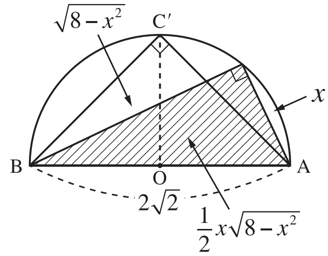
$\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8-8\cos^2\theta}=2\sqrt{2}\sin\theta$ だから

$$\begin{aligned}x\sqrt{8-x^2}&=2\sqrt{2}\cos\theta\cdot2\sqrt{2}\sin\theta\\&=8\sin\theta\cos\theta\\&=4\sin2\theta\end{aligned}$$

ゆえに，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$4\sin2\theta$ は，

$2\theta=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，最大値 4 をとる。

5. 図形による視覚化－円に内接する直角三角形とみる



長さ $2\sqrt{2}$ の線分 AB を直径とする半円 O を考え，その円周上の点を C とする。図のように，AC $=x$ とすれば，△ABC で三平方の定理より

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-x^2}=\sqrt{8-x^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}x\sqrt{8-x^2}$$

$2S=x\sqrt{8-x^2}$ より，$2S$ が最大になるのは，△ABC が AC = BC の直角二等辺三角形のとき，すなわち，$x=\sqrt{8-x^2}$ より，$x=2$ のとき，最大値 4 をとる $\left(0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}\right)$。

通巻第 78 号　©編修・発行　実教出版株式会社　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町 5
2019年　4月　1日　発行　TEL. 03-3238-7777
代表者　小田良次　http://www.jikkyo.co.jp/