ワンポイント教材

ワンポイント教材アーカイブ

定積分の計算の一考察

―面積の利用―

高等学校で学ぶ定積分は，直線や曲線で囲まれた図形の面積を求めることを一つの目標としている。

特に，直線と放物線とで囲まれた図形の面積の計算では，次の定積分がよく現れる。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

この定積分は，図形の面積が平行移動によって変わらないことを利用すると，次の例題のように容易に求めることができる。

（例題１） $\displaystyle\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)dx=-\frac{\alpha^3}{6}$

であることを確かめて，この結果を利用し，次の等式を証明せよ。ただし，$\alpha\leqq\beta$

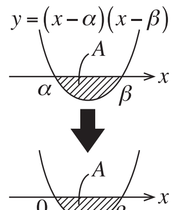
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

〈解〉 $\displaystyle\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha x^2}{2}\right]_0^{\alpha}=-\frac{\alpha^3}{6}$$

それで，$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ とおくと $-S$ は放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸とで囲まれた図形 A の面積である。

ここで，放物線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動しても図形 A の面積は変わらないから，上の結果を利用して



$$S=\int_0^{\beta-\alpha}x\{x-(\beta-\alpha)\}dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

この考えをさらに発展させてみよう。

（例題２） $\displaystyle\int_0^{\alpha}x^2(x-\alpha)dx=-\frac{\alpha^4}{12}$

であることを確かめて，この結果を利用し，次の定積分を計算せよ。ただし,$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$

(1) $\displaystyle\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$

〈解〉 $\displaystyle\int_0^{\alpha}x^2(x-\alpha)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha x^3}{3}\right]_0^{\alpha}=-\frac{\alpha^4}{12}$

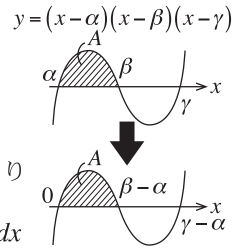
(1) $\displaystyle\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$$=\int_0^{\alpha}x^2(x-\alpha)dx-\beta\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)dx$$

$$=-\frac{\alpha^4}{12}+\frac{\alpha^3\beta}{6}=\frac{\alpha^3(2\beta-\alpha)}{12}$$

(2) $S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$ とおくと，これは $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と x 軸とで囲まれた図形 A の面積である。

ここで，$y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ を x 軸方向に $-\alpha$ だけ平行移動しても図形 A の面積は変わらないから，(1)より



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)dx$$

$$=\int_0^{\beta-\alpha}x\{x-(\beta-\alpha)\}\{x-(\gamma-\alpha)\}dx$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3(2(\gamma-\alpha)-(\beta-\alpha))}{12}$$

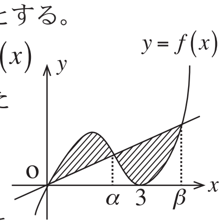
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\beta-\alpha)}{12}$$

このように，定積分の計算に面積を利用することは有効である。様々な場面で指導してほしい。

なお，例題１，２の結果を利用すれば，次のような問題も容易に解くことができる。生徒に考えさせたい。

（練習） $f(x)=x(x-3)^2$ とする。

右図のように，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx$ とで囲まれた２つの部分の面積が等しくなるとき，



(1) α と β の関係式を求めよ。

(2) 定数 m の値を求めよ。

〈答〉(1) $\beta=2\alpha$　　(2) $m=1$