ワンポイント教材

ワンポイント教材アーカイブ

# ベクトルの内積の利用

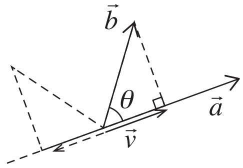
## —点と直線，円—

数学Ｂで学ぶベクトルの内積において，平面上の２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，$\vec{a}$を含む直線上への$\vec{b}$の正射影したベクトルを$\vec{v}$とすると，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

$\quad=\pm\left|\vec{a}\right|\left|\vec{v}\right|$

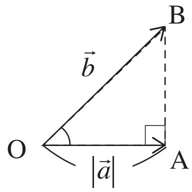
である。




特に，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\angle\mathrm{OAB}=90°$のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2$




このことを利用すれば，平面上の図形に関する公式を容易に導くことができる。

**（点と直線の距離）**

点 $\mathrm{A}(\alpha\ ,\ \beta)$ と直線 $l:ax+by+c=0$との距離 $d$は，
$$d=\frac{\left|a\alpha+b\beta+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

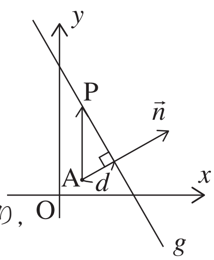
＜証明＞図のように，ベクトル$\vec{n}=(a\ ,\ b)$に垂直な直線を $g$，点Ａと $g$ との距離を $d$，$g$ 上の任意の点を$\mathrm{P}(x\ ,\ y)$とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\pm\left|\vec{n}\right|d \qquad \cdots①$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-\alpha\ ,\ y-\beta)$より，①式を成分で表すことにより，直線 $g$ の方程式は

$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=\pm\left|\vec{n}\right|d$より，

$ax+by-(a\alpha+b\beta)\pm\left|\vec{n}\right|d=0$




この直線 $g$ は $l$ と平行であり，$l$ と一致するするとき，$c=-(a\alpha+b\beta)\pm\left|\vec{n}\right|d$

したがって，$d=\dfrac{\left|a\alpha+b\beta+c\right|}{\left|\vec{n}\right|}$

$\quad=\dfrac{\left|a\alpha+b\beta+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**（円の接線）** 円$x^2+y^2=r^2$に円外の点$\mathrm{A}(\alpha\ ,\ \beta)$から引いた２本の接線の接点を結ぶ直線 $l$ の方程式は，$\alpha x+\beta y=r^2$。

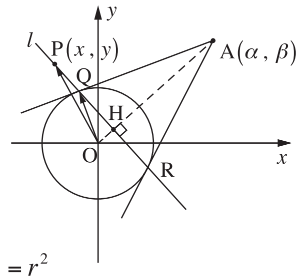
＜証明＞点Ａから $l$ に下した垂線をAH，２本の接線の接点をQ，Rとする。

$l$ 上の任意の点を$\mathrm{P}(x\ ,\ y)$とすると，

$\mathrm{OA}\perp l$より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\quad=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\mathrm{OH}$




ここで，$\angle\mathrm{AQO}=90°$

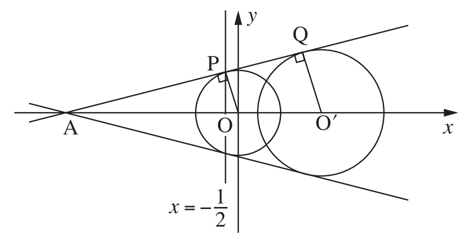
より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=r^2$

よって，$\alpha x+\beta y=r^2$

なお，この結果を用いれば，次のような問題も容易に解くことができる。

**（問題）** ２円$x^2+y^2=4$，$(x-4)^2+y^2=9$の両方に接する直線の方程式を求めよ。

＜解＞２円の中心をO，O′，２本の接線の交点を$\mathrm{A}(-\alpha\ ,\ 0)$，接点をP，Qとする。




$\triangle\mathrm{AOP}\backsim\triangle\mathrm{AO'Q}$より　$\mathrm{OA}:\mathrm{OP}=\mathrm{O'A}:\mathrm{O'Q}$

よって，$\alpha:2=(\alpha+4):3$より，$\alpha=8$

ゆえに，点 $A(-8\ ,\ 0)$から円Ｏに引いた２本の接線の接点を結ぶ直線の方程式は
$$-8x+0y=4 \text{より} x=-\frac{1}{2}$$

これを$x^2+y^2=4$に代入して，接点の座標を求めると，$\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$。

したがって，求める接線の方程式は，
$$-\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{15}}{2}y=4 \text{ より } x\pm\sqrt{15}y+8=0$$


通巻第76号　2018年　4月　1日　発行

©編修・発行　実教出版株式会社　代表者　戸塚雄弐

発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町５　TEL. 03-3238-7777

http://www.jikkyo.co.jp/