# 第 1 章

## 5　微分方程式

### 5.1　変数分離形

■練習問題 (解答)　p.71

■ 1 ■ 両辺を $y$ で割り、変数 $x$ と $y$ を式の両辺に分離すると、
$\frac{1}{y}dy = xdx$ となる。
両辺を積分すると、$\int \frac{1}{y}dy = \int xdx + C_1$ となる。これを解くと、
$\log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ となり、$y = \pm e^{C_1}e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

■ 2 ■ 両辺を $y^2$ で割り、変数 $x$ と $y$ を式の両辺に分離すると、
$\frac{1}{y^2}dy = (x+1)dx$ となる。
両辺を積分すると、$\int \frac{1}{y^2}dy = \int(x+1)dx + C_1$ となる。これを解くと、
$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1$ となり、 $y = -\frac{2}{x^2+2x+C}$

■ 3 ■ 変数分離により一般解を求める。
$\int \frac{1}{y+2} = \int \frac{1}{x-1}dx + C_1$
$\log|y+2| = \log|x-1| + C_1$
$\log|y+2| = \log|x-1| + \log C_2$
$\log|y+2| = \log C|x-1|$
$y+2 = C(x-1)$
一般解: $y = C(x-1) - 2$ となる。
また、$y(2) = 2$ より、$2 = C(2-1) - 2$、$C = 4$、
したがって、特解: $y = 4x - 6$

■ 4 ■ 変数分離して、積分すると、
$\int \frac{1}{y}dy = \int \log x dx + C_1$
$\log|y| = x\log x - x + C_1$、
したがって、一般解: $y = Ce^{x\log|x|-x}$、
条件を代入して、$\frac{2}{e} = Ce^{-1}$、$C = 2$、
したがって、$y = 2e^{x\log|x|-x}$ となり、右辺を変形すると、
$y = 2e^{x\log|x|}e{-}x = 2(e^{\log|x|})^x \cdot e^{-x} = 2x^xe^{-x}$ となる。
したがって、特解: $y = 2e^{-x}x^x$

## 5.2　同次形

■練習問題 (解答)　p.73

■ 1 ■ (1) 与式の両辺を $xy$ で割って、$2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

ここで、$u = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ を代入して、$2(u + x\dfrac{du}{dx}) = \dfrac{1}{u} + u$, 変数分離して積分すると、

$\displaystyle\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{1}{x}dx, \qquad -\log|u^2-1| = \log|C_1 x|$

$u^2 - 1 = \dfrac{1}{C_1 x}$ を変形して、$u = \frac{y}{x}$ を元に戻して、$y^2 = x^2 + \dfrac{x}{C_1}$, $\dfrac{1}{C_1} = C$ とおくと、一般解は、$y = \pm\sqrt{x^2 + Cx}$

$y(1) = 2$ より $C = 3$, したがって、特解、$y = \pm\sqrt{x^2 + 3x}$

(2) 与式を変形して

$$y' = \frac{-2 - \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{x}}$$

より、$u = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ を代入して、

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-2-u}{1-u}\text{、よって、}x\frac{du}{dx} = \frac{-2-u}{1-u} - u = \frac{u^2-2u-2}{1-u}$$

したがって、

$$\int \frac{1-u}{u^2-2u-2}du = \int \frac{1}{x}dx + C_1\text{、両辺を積分して、}-\frac{1}{2}\log(u^2-2u-2) = \log C_2 x$$

$$\log(u^2-2u-2) = \log\left(\frac{1}{C_2^2 x^2}\right), \quad u = \frac{y}{x}\text{を戻して変形すると}$$

$$y^2 - 2xy - 2x^2 = C_3, \qquad y^2 - 2xy - (2x^2 + C_3) = 0$$

よって一般解は、$y = -x \pm \sqrt{3x^2 + C}$

また、$y(0) = \pm\sqrt{C} = 1, \qquad C = 1$ より、特解: $y = x + \sqrt{3x^2 + 1}$

(3) 与式を変形して

$$y' = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$$

より、$u = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ を代入して、

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \text{よって } x\frac{du}{dx} = \frac{u-u^3}{1+u^2}$$

したがって、

$$\int \frac{1+u^2}{u-u^3}du = \int \frac{1}{x}dx, \qquad \int \frac{1}{u} + \frac{u}{1-u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\log|u| - \log|1-u^2| = \log|x| + C_1$$

$$\log\left|\frac{u}{1-u^2}\right| = \log|Cx|, \text{より、} \frac{u}{1-u^2} = C_1 x,$$

ここで、$u = \dfrac{y}{x}$ を戻して、

$$y^2 + Cy - x^2 = 0$$

よって一般解は、$y = \dfrac{1}{2}\left(-C \pm \sqrt{C^2+4x^2}\right)$

$y(0) = -C = -1$ より、 特解: $y = \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4x^2})$

## 5.3　1 階の線形微分方程式

### ■練習問題 (解答)

■ 1 ■ (1) p.74 の公式に当てはめて解く事とする。

与式 $y' - 2y = 2x^2$ を $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ と比較すると、$P(x) = -2, \quad Q(x) = 2x^2$

したがって、

$$\int P(x)dx = -2x, \text{よって、} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 2x^2 e^{-2x}dx = \int x^2 e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \int 2x(-\frac{1}{2})e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \left[-x\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] = \frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+1)$$

したがって、公式より、

$$y = e^{2x}\left\{-\frac{1}{2}e^{-2x}(2x^2+2x+1) + C\right\} = -x^2 - x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

(2) 与式 $y' + \dfrac{2}{x}y$ を公式 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ と比較すると、

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = x - 3$$

$$\int P(x)dx = 2\log|x|, \quad \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int (x-3)e^{2\log|x|}dx = \int (x-3)x^2dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3$$

したがって、公式より

$$y = e^{-2\log|x|}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + C\right) = x^{-2}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + C\right)\frac{1}{4} - x + \frac{C}{x^2}$$

■ 2 ■ (1) 与式 $y' + y = 2e^x$ より、

$$\text{公式}\quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \text{と比較すると、}P(x) = 1,\quad Q(x) = 2e^x$$

したがって、

$$\int P(x)dx = x,\quad \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 2e^x e^x dx = e^{2x}$$

したがって公式より、

$$y = e^{-x}(e^{2x} + C) = e^x + Ce^{-x}$$

$y(0) = 1 + C = 3$ より、$C = 2$ となり、$y = e^x + 2e^{-x}$

(2) 与式 $y' - 3y = 10\cos x$ より、

$$\text{公式}\quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ と比較すると、}P(x) = -3,\quad Q(x) = 10\cos x$$

したがって、

$$\int P(x)dx = -3x,\quad \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 10\cos x \cdot e^{-3x}dx$$

ここで、$I = \int \cos x e^{-3x}dx$ とおき、部分積分を適用していく、

$$I = \int \cos x \cdot e^{-3x}dx = \sin x \cdot e^{-3x} + 3\int \sin x \cdot e^{-3x}dx$$
$$= \sin x \cdot e^{-3x} - 3\cos x \cdot e^{-3x} - 9\int \cos x \cdot e^{-3x}dx$$
$$10I = (\sin x - 3\cos x)e^{-3x}$$
$$I = \frac{1}{4}(\sin x - 3\cos x)e^{-3x}$$

したがって、

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 10\cos x \cdot e^{-3x}dx = (\sin x - 3\cos x)e^{-3x}$$

よって公式より、

$$y = e^{3x}\left\{(\sin x - 3\cos x)e^{-3x} + C\right\} = \sin x - 3\cos x + Ce^{-3x}$$

$y(0) = -3 + C = 2$ より、$C = 5$ となり、$y = \sin x - 3\cos x + 5e^{3x}$

## 5.4　定数係数の 2 階線形微分方程式 –同次形–

■練習問題 (解答)　p.78

■ 1 ■ (1) 特性方程式を解いて一般解を求めると、

$$\text{特性方程式、}\lambda^2-4\lambda-5=0,\qquad (\lambda-5)(\lambda+1)=0,\qquad \lambda=5,-1$$

したがって、一般解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}$ となる。

$$y(0)=C_1+C_2=1,\qquad y'(0)=5C_1-C_2=2\text{ より、}C_1=C_2=\frac{1}{2}$$

よって、特解は $y=\dfrac{1}{2}(e^{5x}+e^{-x})$

(2) 特性方程式を解いて一般解を求めると、

$$\text{特性方程式、}2\lambda^2+3\lambda-9=0,\qquad (2\lambda-3)(\lambda+3)=0,\qquad \lambda=\frac{3}{2},-3$$

したがって、一般解 $y=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2e^{-3x}$ となる。

$$y(0)=C_1+C_2=3,\qquad y'(0)=\frac{3}{2}C_1-3C_2=9\text{ より、}C_1=4,C_2=-1$$

よって、特解は $4e^{\frac{3}{2}x}-e^{-3x}$

(3) 特性方程式を解いて一般解を求めると、

$$\text{特性方程式、}4\lambda^2+12\lambda+9=0,\qquad (2\lambda+3)^2=0,\qquad \lambda=-\frac{3}{2}(\text{重解})$$

したがって、一般解 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{3}{2}x}$ となる。

$$y(0)=C_1=2,\qquad y'(0)=C_2-3=2\text{ より }C_2=5$$

よって、特解は $y=e^{-\frac{3}{2}x}(2+5x)$

(4) 特性方程式を解いて一般解を求めると、

$$\text{特性方程式、}\lambda^2-4\lambda+13=0,\qquad \lambda=-2\pm\sqrt{4-13}=2\pm 3\mathrm{i}$$

したがって、一般解 $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ となる。

$$y'=-e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)\text{ より、}$$

$$y(0)=C_1=2,\qquad y'(0)=-C_1+3C_2=7\text{ より、}C_2=3$$

よって、特解は $y=e^{2x}(2\cos 3x+\sin 3x)$

## 5.5　定数係数の 2 階線形微分方程式 –非同次形–

p.81

■練習問題 (解答)

■ 1 ■ (1) まず、右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$\lambda^2+\lambda-6=0,\quad (\lambda+3)(\lambda-3)=0,\quad \lambda=2,-3$$

したがって、$y_c=C_1e^{2x}+C_2 3^{-3x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺が定数なので $y_s=A$ とおいて、与式に代入する。$y_s'=y_s''=0$ より、

$$-6A=6,\quad A=1,\quad y=y_c+y_s\text{より、}y=C_1+e^{2x}+C_2 3^{-3x}+1$$

$$y(0)=C_1+C_2+1=1,\quad y'(0)=2C_1-3C_2=3,\text{よって、}C_1=3,C_2=-3$$

以上より、
一般解: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-1$
特解: $y=3e^{2x}-3e^{-3x}-1$

(2) 右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$\lambda^2-2\lambda-3=0,\quad (\lambda-3)(\lambda+3)=0,\quad \lambda=3,-1$$

したがって、$y_c=C_1e^{3x}+C_2 3^{-x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺が $x$ の一次式なので $y_s=A_1x+A_2$ とおいて、与式に代入する。$y_s'=A_1$, $y_s''=0$ より、

$$-2A-3(A_1x+A_2)=9x,\quad \text{変形して、}-3A_1x+(-2A_1-3A_2)=9x$$

$$\left\{\begin{array}{ccc}-3A_1 & = & 9\\ -2A_1-3A_2 & = & 0\end{array}\right.,\qquad \text{したがって、}A_1=-3,\quad A_2=2$$

$$y_s=-3x+2,\qquad y=y_c+y_s=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-3x+2$$

$$y(0)=C_1+C_2+2=1,\quad y'(0)=3C_1-C_2-3=2,\text{よって、}C_1=1,C_2=-2$$

以上より、
一般解: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-3x+2$
特解: $y=e^{3x}-2e^{-x}-3x+2$

(3) 右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$\lambda^2-\lambda-12=0,\quad (\lambda-4)(\lambda+3)=0,\quad \lambda=4,-3$$

したがって、$y_c = C_1 e^{4x} + C_2 3^{-3x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺に $e^{3x}$ を含むので、$y_s = Ae^{3x}$ とおいてみる。$y_s' = 3Ae^{3x}$, $y_s'' = 9Ae^{3x}$ を与式に代入すると、

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 12Ae^{3x} = e^{3x}, \quad -6A = 1, \quad A = -\frac{1}{6}$$

$$y = y_c + y_s = C_1 e^{4x} + C_2 3^{-3x} - \frac{1}{6}e^{3x}$$

境界条件より

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 1, \quad y'(0) = 4C_1 - 3C_2 - \frac{1}{2} = 3, \text{よって、} C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{6}$$

以上より、
一般解: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{6}e^{3x}$
特解: $y = e^{4x} + \dfrac{1}{6}e^{-3x} - \dfrac{1}{6}e^{3x}$

(4) 右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad (\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda = 2(\text{重解})$$

したがって、$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺に $e^{2x}$ を含み、余解に $e^{2x}$, $x3^{2x}$ の項を含むので、$y_s = Ax^2 e^{2x}$ とおいてみる。$y_s' = 2Ae^{2x} + 2Ax^2 e^{2x}$, $y_s'' = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2 e^{2x}$ を与式に代入して整理すると、

$$(\text{左辺}) = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4Ax^2e^{2x} = 2Ae^{2x}$$

$$\text{よって、} 2Ae^{2x} = e^{2x} 1 \text{ となり}, \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{したがって、} y = y_c + y_s = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

境界条件より $y(0) = C_1 = 4$。$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + xe^{2x} + x^2 e^{2x}$　より、
$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 2, \quad C_2 = 2 - 2C_1 = -6$ $C_1 = 4$, $C_2 = -6$
以上より、
一般解: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^{2x}$
特解: $y = 4e^{2x} - 6xe^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^{2x}$

(5) 右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \quad (2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}, -1$$

したがって、$y_c = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺に $\sin x$ を含むので、$y_s = A_1 \sin x + A_2 \cos x$ とおいてみる。

$$y_s' = A_1 \cos x - A_2 \sin x, \quad y_s'' = -A_1 \sin x - A_2 \cos x \text{ を与式に代入して整理する。}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -2A_1\sin x - 2A_2\cos x + A_1\cos x - A_2\sin x - A_1\sin x - A_2\cos x \\
&= (-3A_1 - A_2)\sin x + (A_1 - 3A_2)\cos x
\end{aligned}
$$

右辺の $10\sin x$ と比較し、$-3A_1 - A_2 = 10,\ A_1 - 3A_2 = 0$ より、$A_1 = -3,\ A_2 = -1$
よって、$y = y_c + y_s = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x} - 3\sin x - \cos x$
境界条件を適用するため、$y'$ を求めると、$y' = \dfrac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}x} - C_2e^{-x} - 3\cos x + \sin x$,
$y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 2,\ y'(0) = \dfrac{1}{2}C_1 - C_2 - 3 = 3,\ C_1 = 6,\ C_2 = -3$
以上より、
一般解: $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2e^{-x} - \cos x - 3\sin x$
特解: $y = 6e^{\frac{x}{2}} - 3e^{-x} - \cos x - 3\sin x$

(6) 右辺を 0 とした同次方程式の解 $y_c$ を求める。特性方程式を解くと、

$$
\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda = 1, -2
$$

したがって、$y_c = C_1e^x + C_2e^{-2x}$ となる。次に特解 $y_s$ を求める。右辺に $e^x$ を含むので、$y_s = Axe^x$ とおいてみる。

$$
y_s' = Ae^x + Axe^x, \quad y_s'' = 2Ae^x + Axe^x、
$$

元の式に代入すると、(左辺) $= 3Ae^x$ となり、$3Ae^x = 3e^x$より、$A = 1$ したがって、$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x$, 境界条件を適用するため、$y'$ を求めると、$y' = C_1e^x - 2C_2e^{-2x} + e^x + xe^x$, $y(0) = C_1 + C_2 = 1$, $y'(0) = C_1 - 2C_2 + 1 = 5$, したがって、$C_1 = 2,\ C_2 = -1$
以上より、
一般解: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \dfrac{1}{3}e^x + xe^x$
特解: $y = 2e^x - e^{-2x} + xe^x$