1.6 ベクトル補充問題

■補充問題の解答

1. 点 A に及ぼす力を T とすると、T は F 及び mg の合力となる。したがって、T は F と mg からなる長方形の対角線に等しいので、$T = 2F = 20$ N。また、$mg = T\cos 30^o = 10\sqrt{3}$。したがって、$m = \dfrac{10\sqrt{3}}{9.8} \simeq 1.77$ kg
2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,7) - (2,3) = (2,4)$ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,5) - (1,2) = (3,3)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (7,5) - (4,5) = (3,0)$ より、
   (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3,3) \cdot (3,0) = 9$
   (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\theta$ より、$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3}$、よって $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$
4. (1) 求めるベクトルは $(3p, 4p)$ とおける。大きさは $|(3p,4p)| = \sqrt{9p^2 + 16p^2} = \sqrt{25p^2} = 5p = 15$ したがって、$p = 3$, 求めるベクトルは、$(9, 12)$
   (2) 求めるベクトルを (p,q) とすると、$\mathbf{a}$ に垂直なので、$(3,4)\cdot(p,q) = 3p + 4q = 0$、したがって $3p = -4q$。求めるベクトルは、$(p, -\dfrac{3}{4}p)$ となるがこれは x, y 成分の比を表しているので、改めて $(4p, -3p)$ とおく。大きさが 6 なので、$(4t)^2 + (-3t)^2 = 6^2$, $t = \dfrac{6}{5}$, よって求めるベクトルは、$\dfrac{6}{5}(4,-3)$
5. $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 及び $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$、$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$、$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$、$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$、$\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}$、$\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$ を利用して解く。
   (1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (-\mathbf{i} + 3\mathbf{k})\times(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -2\mathbf{i}\times\mathbf{i} - 2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\times\mathbf{i} + 6\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
   (2) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\times(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\times\mathbf{i} - 6\mathbf{i}\times\mathbf{j} + 4\mathbf{i}\times\mathbf{k} - \mathbf{j}\times\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\times\mathbf{j} - 2\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \mathbf{k}\times\mathbf{i} - 3\mathbf{k}\times\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\times\mathbf{k} = 2\cdot\mathbf{0} - 6\mathbf{k} + 4(-\mathbf{j}) - \mathbf{k} + 3\cdot\mathbf{0} - 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3(-\mathbf{i}) + 2\cdot\mathbf{0} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
   (3) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})\times(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
6. それぞれ前問を利用して、$|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$ を計算すればよい。
   (1) $|(6,6,-2)\cdot(-3,1,4)| = |-18 + 6 - 8| = 20$
   (2) $|(1,-3,5)\cdot(2,1,5)| = |2 - 3 + 25| = 24$
   (3) $|(7,8,-2)\cdot(-2,2,-1)| = |-14 + 16 + 2| = 4$