

3. 1. 微分係数

問題 1.

(1)

$$f'(4) = \lim_{b \rightarrow 4} \frac{f(b) - f(4)}{b - 4} = \lim_{b \rightarrow 4} \frac{b^2 - 4^2}{b - 4} = \lim_{b \rightarrow 4} \frac{(b - 4)(b + 4)}{b - 4} = \lim_{b \rightarrow 4} (b + 4) = 8$$

(2)

$$f'(2) = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{f(b) - f(2)}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{b^3 - 2^3}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{(b - 2)(b^2 + 2b + 4)}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} (b^2 + 2b + 4) = 12$$

問題 2. $f(x) = x^3$ とする。 $f(2) = 8$ である。問題 1 (2) より,
 $f'(2) = 12$. よって, 接線の方程式は, $y - 8 = 12(x - 2)$. 整理すると
 $y = 12x - 16$

・練習問題

1.

(1)

$$f'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3b^2 - 3 \cdot 1^2}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{3(b - 1)(b + 1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} 3(b + 1) = 6$$

(2)

$$f'(2) = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{f(b) - f(2)}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{(-2)b^3 - (-2) \cdot 2^3}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} \frac{(-2)(b - 2)(b^2 + 2b + 4)}{b - 2} = \lim_{b \rightarrow 2} (-2)(b^2 + 2b + 4) = -24$$

2.

(1) $f(x) = x^2$ とする。 $f(3) = 9$ である。また, 例題 1 より, $f'(3) = 6$.

よって, 接線の方程式は, $y - 9 = 6(x - 3)$. 整理すると $y = 6x - 9$

(2) $f(x) = x^3$ とする。 $f(-1) = -1$ である。また, 例題 1 と同様にし
て, $f'(-1) = 3$. よって, 接線の方程式は, $y - (-1) = 3(x - (-1))$. 整
理すると $y = 3x + 2$

3. 2. 導関数

問題 1.

$$(1) y' = 3x^2$$

$$(2) y = x^{-3} \text{ より, } y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

問題 2.

$$(1) y' = -(x^3)' + 3(x^2)' - (5)' = -3x^2 + 3 \cdot 2x - 0 = -3x^2 + 6x$$

$$(2) y = 3x + 2x^{-3} \text{ より, } y' = 3(x)' + 2(x^{-3})' = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3)x^{-4} = 3 - \frac{6}{x^4}$$

・練習問題

1.

$$(1) y' = 5x^4$$

$$(2) y = x^{-4} \text{ より, } y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$(3) y' = 2(x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$$

$$(4) y = -3x^{-1} \text{ より, } y' = (-3) \cdot (-1)x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$

2.

$$(1) y' = (x^2)' - 2(x)' + (3)' = 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 2x - 2$$

$$(2) y' = -3(x^3)' + 2(x^2)' - (7)' = -3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 0 = -9x^2 + 4x$$

$$(3) y = 2x^{-2} - 1 \text{ より, } y' = 2(x^{-2})' - (1)' = 2 \cdot (-2x^{-3}) - 0 = -\frac{4}{x^3}$$

$$(4) y = 6x^{-1} - x + 5 \text{ より,}$$

$$y' = 6(x^{-1})' - (x)' + (5)' = 6 \cdot (-x^{-2}) - 1 + 0 = -\frac{6}{x^2} - 1$$

3.

$$(1) f(x) = x^4 \text{ と置く。 } f'(x) = 4x^3 \text{ より } f'(-1) = -4. \text{ 接線の方程式}$$

は, $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$. よって, $y - 1 = -4(x + 1)$. 整理す

ると $y = -4x - 3$

(2) $f(x) = \frac{2}{x^3}$ と置く。 $f'(x) = -\frac{6}{x^4}$ より $f'(-1) = -6$. 接線の方程

式は, $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$. よって, $y - (-2) = -6(x + 1)$.

整理すると $y = -6x - 8$

(3) $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$ と置く。 $f'(x) = 4x - 5$ より $f'(2) = 3$. 接

線の方程式は, $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. よって, $y - (-3) = 3(x - 2)$.

整理すると $y = 3x - 9$

(4) $f(x) = \frac{1}{x} + x$ と置く。 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ より $f'(1) = 0$. 接線の方

程式は, $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. よって, $y - 2 = 0(x - 1)$. 整理する

と $y = 2$

3. 3. 微分公式(1)

問題 1.

(1)

$$y' = (5x - 2)'(2x + 3) + (5x - 2)(2x + 3)' = 5(2x + 3) + (5x - 2) \cdot 2 = 20x + 11$$

(2)

$$y' = (x^3 + 2)'(x + 3) + (x^3 + 2)(x + 3)' = 3x^2(x + 3) + (x^3 + 2) \cdot 1 = 4x^3 + 9x^2 + 2$$

問題 2.

(1)

$$y' = \frac{(x+5)'(3x-1) - (x+5)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{1 \cdot (3x-1) - (x+5) \cdot 3}{(3x-1)^2} = -\frac{16}{(3x-1)^2}$$

$$(2) \quad y' = -\frac{(x^2 + 3x - 2)'}{(x^2 + 3x - 2)^2} = -\frac{2x + 3}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

問題 3.

(1) 一般に, 3 個の関数の積 $f(x)g(x)h(x)$ を微分すると,

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)(g(x)h(x)) + f(x)(g(x)h(x))'$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x))$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

となることに注意する。

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$ の両辺を微分すると,

$$(\sqrt[3]{x})' \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x})' \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x})' = 1.$$

$$\text{したがって, } 3(\sqrt[3]{x})' \sqrt[3]{x^2} = 1. \quad \text{よって } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(\text{別解: } y = x^{\frac{1}{3}} \text{ より } y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \quad \text{の両辺を微分すると,}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{したがって, } 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{x^2}. \quad \text{よって } y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

(別解: $y = x^{-\frac{1}{2}}$ より $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$)

・練習問題

1.

(1)

$$y' = (x+1)'(3x-5) + (x+1)(3x-5)' = 1 \cdot (3x-5) + (x+1) \cdot 3 = 6x-2$$

(2) $y' = (3x^2 + 2x + 5)'(2x+1) + (3x^2 + 2x + 5)(2x+1)'$
 $= (6x+2)(2x+1) + (3x^2 + 2x + 5) \cdot 2 = 18x^2 + 14x + 12$

(3) $y' = (x^2)'(x^2+1) + x^2(x^2+1)' = 2x(x^2+1) + x^2(2x) = 2x(2x^2+1)$

(4)

$$y' = \frac{(2x-3)'(5x+8) - (2x-3)(5x+8)'}{(5x+8)^2} = \frac{2(5x+8) - (2x-3) \cdot 5}{(5x+8)^2} = \frac{31}{(5x+8)^2}$$

(5) $y' = -\frac{(x^2+3x-1)'}{(x^2+3x-1)^2} = -\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2}$

(6) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2$ の両辺を微分すると,

$$(\sqrt[3]{x^2})' \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2})' \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2})' = 2x.$$

したがって, $3(\sqrt[3]{x^2})' \cdot x\sqrt[3]{x} = 2x$. よって $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(別解: $y = x^{\frac{2}{3}}$ より $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$)

(7) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x}$ の両辺を微分すると,

$$(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' = -\frac{1}{x^2}.$$

したがって, $3(\frac{1}{\sqrt[3]{x}})' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{1}{x^2}$. よって $y' = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

(別解: $y = x^{-\frac{1}{3}}$ より $y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$)

$$\begin{aligned}
 (8) \quad y' &= \frac{(\sqrt{x})'(3x+2) - \sqrt{x}(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \cdot 3}{(3x+2)^2} \\
 &= \frac{(3x+2) - 6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \frac{-3x+2}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}
 \end{aligned}$$

3. 4. 微分公式(2)

問題 1.

(1) $u = 3x - 2$ とおくと, $y = u^4$. よって $\frac{du}{dx} = 3$, $\frac{dy}{du} = 4u^3$. した

がって, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot 3 = 12(3x - 2)^3$.

(2) $u = x^2 + 1$ とおくと, $y = \frac{1}{u^3}$. よって $\frac{du}{dx} = 2x$, $\frac{dy}{du} = -\frac{3}{u^4}$.

したがって, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(-\frac{3}{u^4}\right) \cdot 2x = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^4}$.

問題 2.

$y = \frac{1}{x+2}$ より $(x+2)y = 1$. $xy = 1 - 2y$ より $x = \frac{1-2y}{y} = \frac{1}{y} - 2$.

したがって, $f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 2$. f と f^{-1} をそれぞれ微分すると,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad (f^{-1})'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

・練習問題

1.

(1) $u = 3x + 5$ とおくと, $y = u^{10}$. よって $\frac{du}{dx} = 3$, $\frac{dy}{du} = 10u^9$. し

たがって, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 3 = 30(3x + 5)^9$.

(2) $u = 2x^2 - 4x + 3$ とおくと, $y = u^8$. よって $\frac{du}{dx} = 4x - 4 = 4(x - 1)$,

$\frac{dy}{du} = 8u^7$. したがって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7 \cdot 4(x - 1) = 32(x - 1)(2x^2 - 4x + 3)^7$$

(3) $u = 2x + 1$ とおくと, $y = \sqrt{u}$. よって $\frac{du}{dx} = 2$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. し

たがって, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

(4) $u = x^2 + x + 1$ とおくと, $y = \sqrt{u}$. よって $\frac{du}{dx} = 2x + 1$,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad . \quad \text{したがって,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

2.

$$y = \frac{2x}{x-1} \quad \text{より} \quad (x-1)y = 2x. \quad x(y-2) = y \quad \text{より}$$

$$x = \frac{y}{y-2} = \frac{2}{y-2} + 1. \quad \text{したがって,} \quad f^{-1}(y) = \frac{2}{y-2} + 1. \quad f \text{ と } f^{-1} \text{ をそ}$$

$$\text{れぞれ微分すると,} \quad f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}, \quad (f^{-1})'(y) = -\frac{2}{(y-2)^2}.$$

また, $(x-1)(y-2) = 2$ であることより,

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \left(-\frac{2}{(y-2)^2} \right) = 1$$

3. 5. いろいろな関数の微分 (その1)

問題 1.

$$(1) \quad u = 2x \text{ とおくと, } y = \cos u. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = 2, \quad \frac{dy}{du} = -\sin u.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot 2 = -2 \sin 2x.$$

$$(2) \quad y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

問題 2.

$$(1) \quad u = -x \text{ とおくと, } y = e^u. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = -1, \quad \frac{dy}{du} = e^u. \quad \text{したが}$$

$$\text{って, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot (-1) = -e^{-x}$$

$$(2) \quad y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

問題 3.

$$(1) \quad u = 3x + 4 \text{ とおくと, } y = \log u. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = 3, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}. \quad \text{し}$$

$$\text{たがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{3}{3x + 4}$$

$$(2) \quad y' = (x)' \log x + x (\log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

・練習問題

1.

$$(1) \quad \text{例題 1 と同様にして, } (\sin 2x)' = 2 \cos 2x, \quad (\cos 3x)' = -3 \sin 3x. \quad \text{よ} \\ \text{って } y' = (\sin 2x)' + (\cos 3x)' = 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$$

$$(2) \quad u = 2x - \frac{\pi}{3} \text{ とおくと, } y = \cos u. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = 2, \quad \frac{dy}{du} = -\sin u.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot 2 = -2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}).$$

(3)

$$y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(4) \quad u = \sin x \text{ とおくと, } y = u^2. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{du} = 2u.$$

したがって, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$.

$$(5) \quad y' = (e^x)' - (x)' - (1)' = e^x - 1$$

$$(6) \quad u = 2x + 3 \text{ とおくと, } y = e^u. \text{ よって, } \frac{du}{dx} = 2, \frac{dy}{du} = e^u. \text{ した}$$

$$\text{がって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2 = 2e^{2x+3}.$$

$$(7) \quad y' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$$

$$(8) \text{ 例題 2 より, } (e^{2x})' = 2e^{2x}. \text{ よって,}$$

$$y' = (e^{2x})' \sin x + e^{2x} (\sin x)' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x} (2 \sin x + \cos x)$$

$$(9) \quad u = x^2 + 1 \text{ とおくと, } y = \log u. \text{ よって, } \frac{du}{dx} = 2x, \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}. \text{ し}$$

$$\text{たがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(10) \quad y' = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1)$$

2.

$$(1) \quad f(x) = \sin x \text{ と置く. } f'(x) = \cos x \text{ より } f'(0) = \cos 0 = 1.$$

接線の方程式は, $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ より $y - 0 = 1(x - 0)$ 整理すると $y = x$

$$(2) \quad f(x) = e^x \text{ と置く. } f'(x) = e^x \text{ より } f'(1) = e^1 = e.$$

接線の方程式は, $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ より $y - e = e(x - 1)$ 整理すると $y = ex$

3. 6. いろいろな関数の微分 (その2)

問題 1.

(1) 両辺の対数をとると, $\log y = x^2 \log 2$. 両辺を x で微分すると,

$$\frac{y'}{y} = 2(\log 2)x. \text{ よって, } y' = 2(\log 2)xy = (\log 2)x2^{x^2+1}.$$

(2) 両辺の絶対値の対数をとると, $\log |y| = \log \left| \frac{(x+3)^3}{(x+1)(x+2)^2} \right|$

$= 3\log|x+3| - \log|x+1| - 2\log|x+2|$. 両辺を x で微分すると,

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}. \text{ よって,}$$

$$y' = \frac{(x+3)^3}{(x+1)(x+2)^2} \left(\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right).$$

問題 2.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x = 1, \sin x = 0, \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる x をそ

れぞれ探すと, $x = \frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$. よって,

$$\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}, \sin^{-1}(0) = 0, \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

問題 3.

$u = \frac{x}{3}$ とおくと, $y = \tan^{-1} u$. よって, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}, \frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}$. し

$$\text{たがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{3(1+u^2)} = \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} = \frac{3}{x^2+9}$$

・練習問題

1.

(1) 両辺の対数をとると, $\log y = e^x$. 両辺を x で微分すると, $\frac{y'}{y} = e^x$.

よって, $y' = e^x y = e^{e^x+x}$.

(2) 両辺の対数をとると, $\log y = \log \frac{x^2}{(x^2-1)^2} = 2\log|x| - 2\log|x^2-1|$.

両辺を x で微分すると, $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - 2 \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{x} - \frac{4x}{x^2 - 1}$. よって,

$$y' = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^2} \left(\frac{2}{x} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right).$$

(3) 両辺の対数をとると, $\log y = x \log x$. 両辺を x で微分すると,

$$\frac{y'}{y} = (x)' \log x + x(\log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1. \text{ よって,}$$

$$y' = (\log x + 1)x^x$$

(4) $u = \frac{x}{2}$ とおくと, $y = \tan^{-1} u$. よって, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}$.

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2(1+u^2)} = \frac{1}{2 \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right)} = \frac{2}{x^2 + 4}$$

3. 7. 関数の増減と極大・極小

問題 1.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. したがって, $x < 0, 2 < x$ のとき $f'(x) > 0$ であり, $0 < x < 2$ のとき $f'(x) < 0$ である。よって, $f(x)$ は $x < 0, 2 < x$ で増加し, $0 < x < 2$ で減少する。

問題 2.

(1) $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$. よって, $x = -4, 0$ で $f'(x) = 0$ となり, 極値をとる x の候補は $x = -4$ と $x = 0$. $f'(x)$ の符号は $x = -4$ では正から負に, $x = 0$ では負から正に変化する。よって, $x = -4$ で極大値 $f(-4)=36$, $x = 0$ で極小値 $f(0)=4$ をとる。

(2) $f'(x) = -3x^2$. よって, $x = 1$ で $f'(x) = 0$ となり, 極値をとる x の候補は $x = 0$. $f'(x)$ の符号は $x = 0$ の左右で共に負である。よって, $x = 0$ では極値をとらず, 極値は存在しない。

・練習問題

1.

(1) $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$. したがって, $x < 2$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $2 < x$ のとき $f'(x) > 0$ である。よって, $f(x)$ は $x < 2$ で減少し, $2 < x$ で増加する。また, $x = 2$ で極小値 $f(2)=-4$ をとる。

(2) $f'(x) = -3x^2 - 12x + 15 = -3(x-1)(x+5)$. したがって, $x < -5, 1 < x$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $-5 < x < 1$ のとき $f'(x) > 0$ である。よって, $f(x)$ は $x < -5, 1 < x$ で減少し, $-5 < x < 1$ で増加する。また, $x = -5$ で極小値 $f(-5)=-95$, $x = 1$ で極大値 $f(1)=13$ をとる。

(3) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. したがって, $x < 0$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $0 < x$ のとき $f'(x) > 0$ である。よって, $f(x)$ は $x < 0$ で減少し, $0 < x$ で増加する。また, $x = 0$ で極小値 $f(0)=1$ をとる。

(4) $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. したがって, $x < 0$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $0 < x$ のとき $f'(x) > 0$ である。よって, $f(x)$ は $x < 0$ で減少し, $0 < x$ で増加する。また, $x = 0$ で極小値 $f(0)=1$ をとる。

2.

(1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. よって, $x=1$ で $f'(x)=0$ となり,

極値をとる x の候補は $x=1$. $f'(x)$ の符号は $x=1$ で負から正に変化する。よって, $x=1$ で極小値 $f(1)=2$ をとる。

(2) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. よって, $x=-1$ で $f'(x)=0$ となり,

極値をとる x の候補は $x=-1$. $f'(x)$ の符号は $x=-1$ で負から正に変化

する。よって, $x=-1$ で極小値 $f(-1) = -\frac{1}{e}$ をとる。

3. 8. 微分の応用

問題 1.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2. \text{ よって, } v(2) = 12 \text{ [m/s].}$$

問題 2.

$$(1) f'(x) = 8x + 5, f''(x) = 8 \quad (2) f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x$$

$$(3) f'(x) = e^x, f''(x) = e^x \quad (2) f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

問題 3.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2, a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t. \text{ よって, } a(2) = 12 \text{ [m/s}^2\text{].}$$

問題 4.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -9.8t + v_0 \text{ [m/s]} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

問題 5.

運動方程式 $F = ma$ より, $a(t) = \frac{F}{m}$ である。よって,

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = \frac{F}{m} \text{ かつ } v(0) = 0 \text{ を満たすように } v(t) \text{ を決めれば}$$

$$\text{よい。したがって, } v(t) = \frac{F}{m}t \text{ [m/s].} \text{ さらに, } \frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \frac{F}{m}t \text{ か}$$

$$\text{つ } x(0) = 0 \text{ を満たすように } x(t) \text{ を決めると } x(t) = \frac{F}{2m}t^2 \text{ [m].}$$

・練習問題

1.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{T-t}} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{4\sqrt{(T-t)^3}}$$

2.

$$\text{運動方程式 } F = ma \text{ より, } a(t) = \frac{F}{m} = \frac{5}{0.1} = 50 \text{ [m/s}^2\text{].}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = 50 \text{ かつ } v(0) = 20 \text{ を満たすように } v(t) \text{ を決めると}$$

$$v(t) = 50t + 20 \text{ [m/s].}$$

3. 9. 2次元空間での運動

問題 1.

$$(1) \quad v(t) = (x'(t), y'(t)) = (v_x(0), -gt + v_y(0)).$$

$$a(t) = (x''(t), y''(t)) = (0, -g).$$

$$(2) \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_y(0)t + y(0) = -4.9t^2 + 19.6t = 0 \quad \text{を } t > 0 \text{ のもと}$$

で解くと, $t = 4$ [s]. このとき, $x(4) = v_x(0) \cdot 4 + x(0) = 10 \cdot 4 = 40$ [m],

$$x'(4) = v_x(0) = 10 \text{ [m/s]}, \quad y''(4) = -g = -9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

$$(3) \quad y'(t) = -gt + v_y(0) = -9.8t + 19.6 = 0 \quad \text{を } t > 0 \text{ のもとで解くと,}$$

$$t = 2 \text{ [s]}. \quad \text{このとき, } x(2) = v_x(0) \cdot 2 + x(0) = 10 \cdot 4 = 20 \text{ [m]},$$

問題 2.

(1)

$$v(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$= (-R\omega \sin(\omega t + \theta_0), R\omega \cos(\omega t + \theta_0)) = R\omega(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0))$$

.

$$a(t) = (x''(t), y''(t))$$

$$= (-R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0), -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)) = -R\omega^2(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0))$$

.

(2), $v(t)$ と $p(t)$ の内積 $v(t) \bullet p(t)$ が 0 であることを示せばよい。

$$v(t) \bullet p(t)$$

$$= (-R\omega \sin(\omega t + \theta_0)) \times R \cos(\omega t + \theta_0) + R\omega \cos(\omega t + \theta_0) \times R \sin(\omega t + \theta_0) = 0$$

よって, $v(t)$ と $p(t)$ は直交する。

また, $a(t) = -R\omega^2(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) = -R\omega p(t)$ より, $a(t)$ は $p(t)$

と平行で向きが逆向きである。したがって, $a(t)$ は円の中心方向を向き,

$v(t)$ と直交する。

$$(3) \quad |v(t)| = |R\omega| \sqrt{(-\sin(\omega t + \theta_0))^2 + \cos^2(\omega t + \theta_0)} = R|\omega|,$$

$$|a(t)| = |-R\omega^2| \sqrt{(\cos^2(\omega t + \theta_0) + \sin^2(\omega t + \theta_0))} = R\omega^2$$

問題 3.

(1) 公転周期 T [s] と 角速度 ω [ラジアン/s] は, $\omega T = 2\pi$ を満た

す。よって、 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.1416}{27.3 \times 24 \times 60 \times 60} = 2.664 \times 10^{-6}$ [ラジアン/s]

(2) 運動方程式 $F = ma$ と、問題 2(3)の解答 $a = R\omega^2$ より、 $F = mR\omega^2$

(3) $G \frac{mm'}{R^2} = mR\omega^2$ より

$$m' = \frac{R^3 \omega^2}{G} = \frac{(3.844 \times 10^8)^3 \times (2.664 \times 10^{-6})^2}{6.674 \times 10^{-11}} = 6.040 \times 10^{24} \text{ [kg]}$$

問題 4.

月の加速度と月に働く万有引力はどちらも月の質量 m に比例している
とみなしているため、(3)で用いた運動方程式の両辺から m が消去される。

・練習問題

1.

$$v(t) = (v_x(0), -gt + v_y(0)) = (10, -9.8t + 10).$$

$$p(t) = (v_x(0)t + x(0), -\frac{g}{2}t^2 + v_y(0)t + y(0)) = (10t, -4.9t^2 + 10t + 20).$$

よって、 $y(t_1) = -4.9t_1^2 + 10t_1 + 20 = 0$ を $t_1 > 0$ のもとで解くと、

$$t_1 = 3.3 \text{ [s]}. \text{ このとき、 } x(3.3) = 10 \cdot 3.3 = 33 \text{ [m]},$$

2.

R, T, ω, m' をそれぞれ、太陽と地球の距離、地球の公転周期、地球の角速度、太陽の質量とする。問題 3 と同様に考える。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.1416}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 1.992 \times 10^{-7} \text{ [ラジアン/s]}$$

$$m' = \frac{R^3 \omega^2}{G} = \frac{(1.496 \times 10^{11})^3 \times (1.992 \times 10^{-7})^2}{6.674 \times 10^{-11}} = 1.991 \times 10^{30} \text{ [kg]}$$