

[微分係数]

問題 1.

(1)

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{(b - a)(b + a)}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} (b + a) = 2a$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{b - a} \\ &= \lim_{b \rightarrow a} (b^2 + ab + a^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

問題 2.

$a = 1$ の付近の b に対して $x = a$ から $x = b$ までの $f(x)$ の平均変化率を計算する。

(1)

b	1.1	1.01	1.001
$f(b) - f(a)$	0.0488088	0.0049876	0.0004999
$b - a$	0.1	0.01	0.001
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	0.488088	0.49876	0.4999

この表から、 $f'(1) = 0.5$ と予想することができる。

(2)

b	1.1	1.01	1.001
$f(b) - f(a)$	-0.0909091	-0.0099010	-0.0009990
$b - a$	0.1	0.01	0.001
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	-0.909091	-0.99010	-0.9990

この表から、 $f'(1) = -1$ と予想することができる。

[導関数]

問題 1.

(1) $y' = 2x + 3$

(2) $y' = 2 + \frac{3}{x^2}$

(3) $y' = 2x - \frac{2}{x^3}$

問題 2.

(1) $f(x) = x^5$ と置く。 $f'(x) = 5x^4$ より $f'(-1) = 5$ 。接線の方程式は、
 $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$ 。よって、 $y - (-1) = 5(x + 1)$ 。整理すると $y = 5x + 4$

(2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$ と置く。 $f'(x) = 2x + 3$ より $f'(-4) = -5$ 。接線の方程式は、
 $y - f(-4) = f'(-4)(x - (-4))$ 。よって、
 $y - 2 = -5(x + 4)$ 。整理すると $y = -5x - 18$

(3) $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ と置く。 $f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$ より $f'(3) = \frac{7}{3}$ 。接線の方程式は、
 $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ 。よって、 $y - 5 = \frac{7}{3}(x - 3)$ 。整理すると $y = \frac{7}{3}x - 2$

(4) $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ と置く。 $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$ より $f'(1) = 0$ 。接線の方程式は、
 $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ 。よって、 $y - 3 = 0 \cdot (x - 1)$ 。整理すると $y = 3$

[微分公式]

問題 1.

(1)

$$y' = (2x+1)'(3x+1) + (2x+1)(3x+1)' = 2(3x+1) + (2x+1) \cdot 3 = 12x + 5$$

(2)

$$y' = (x^2)'(x-1) + x^2(x-1)' = 2x(x-1) + x^2 \cdot 1 = x(3x-2)$$

(3)

$$y' = \frac{(3x-4)'(5x+4) - (3x-4)(5x+4)'}{(5x+4)^2} = \frac{3(5x+4) - (3x-4) \cdot 5}{(5x+4)^2} = \frac{32}{(5x+4)^2}$$

$$(4) \quad y' = -\frac{(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$$

$$(5) \quad u = 2x+3 \text{ とおくと, } y = u^{10}. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = 2, \quad \frac{dy}{du} = 10u^9.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 2 = 20(2x+3)^9$$

$$(6) \quad u = x - \frac{1}{x} \text{ とおくと, } y = u^5. \quad \text{よって, } \frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{dy}{du} = 5u^4.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 5 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

[いろいろな関数の微分]

問題 1.

$$(1) y' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x - x \sin x$$

$$(2) u = 5x \text{ とおくと, } y = 2 \sin u. \text{ よって, } \frac{du}{dx} = 5, \frac{dy}{du} = 2 \cos u.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cos u \cdot 5 = 10 \cos 5x$$

$$(3) u = 2x + 3 \text{ とおくと, } y = \cos u. \text{ よって, } \frac{du}{dx} = 2, \frac{dy}{du} = -\sin u.$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot 2 = -2 \sin(2x + 3)$$

$$(4) y' = \frac{(\sin x)' x - (\sin x)(x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$(5) y' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$(6) y' = (x)'(e^x - 1) + x(e^x - 1)' = 1 \cdot (e^x - 1) + x e^x = (x + 1)e^x - 1$$

$$(7) u = 3x + 2 \text{ とおくと, } y = e^u. \text{ よって, } \frac{du}{dx} = 3, \frac{dy}{du} = e^u. \text{ した}$$

$$\text{がって, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3 = 3e^{3x+2}$$

(8)

$$y' = (e^x)'(\cos x + \sin x) + e^x(\cos x + \sin x)'$$
$$= e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x$$

(9)

$$y' = (x+1)' \log x + (x+1)(\log x)' = 1 \cdot \log x + (x+1) \frac{1}{x} = \log x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$(10) y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

問題 2.

$$(1) f(x) = \sqrt{x+1} \text{ と置く。 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ より } f'(3) = \frac{1}{4}. \text{ 接線の}$$

$$\text{方程式は, } y - f(3) = f'(3)(x - 3). \text{ よって, } y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3). \text{ 整理す}$$

ると $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

(2) $f(x) = 2e^{-3x}$ と置く。 $f'(x) = -6e^{-3x}$ より $f'(0) = -6$ 。接線の方程式は、 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ 。よって、 $y - 2 = -6x$ 。整理すると $y = -6x + 2$

(3) $f(x) = e^x \cos 2x$ と置く。 $f'(x) = e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)$ より $f'(0) = 1$ 。接線の方程式は、 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ 。よって、 $y - 1 = x$ 。整理すると $y = x + 1$

(4) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ と置く。 $f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$ 。よって、 $f'(1) = 1$ 。接線の方程式は、 $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ 。したがって、 $y = x - 1$

問題 3.

(1) 両辺の対数をとると、 $\log y = -x \log x$ 。両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = -((x)' \log x + x(\log x)') = -(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}) = -(\log x + 1)$$

$$y' = \frac{-(\log x + 1)}{x^x}$$

(2) 両辺の対数をとると、 $\log y = x \log(\log x)$ 。両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = (x)' \log(\log x) + x(\log(\log x))' = 1 \cdot \log(\log x) + x \frac{(\log x)'}{\log x}$$

$$= \log(\log x) + x \frac{\frac{1}{x}}{\log x} = \log(\log x) + \frac{1}{\log x}$$

よって、

$$y' = \left(\log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right) (\log x)^x$$

[関数の増減と極大・極小]

問題 1.

(1) $f'(x) = 2x - 1$. したがって, $x < \frac{1}{2}$ のとき $f'(x) < 0$ であり,
 $\frac{1}{2} < x$ のとき $f'(x) > 0$ である. よって, $f(x)$ は $x < \frac{1}{2}$ で減少, $\frac{1}{2} < x$
で増加する.

また, $x = \frac{1}{2}$ で極小値 $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ をとる.

(2) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 = (3x - 5)(x + 1)$. したがって, $x < -1$, $\frac{5}{3} < x$
のとき $f'(x) > 0$ であり, $-1 < x < \frac{5}{3}$ のとき $f'(x) < 0$ である. よって,
 $f(x)$ は $x < -1$, $\frac{5}{3} < x$ で増加, $-1 < x < \frac{5}{3}$ で減少する.

また, $x = -1$ で極大値 $f(-1) = 8$, $x = \frac{5}{3}$ で極小値 $f(\frac{5}{3}) = -\frac{40}{27}$ をとる.

(3) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. したがって, $x < 0$ のとき $f'(x) > 0$ であり,
 $-0 < x$ のとき $f'(x) < 0$ である. よって, $f(x)$ は $x < 0$ で増加, $0 < x$
で減少する.

また, $x = 0$ で極大値 $f(0) = 1$ をとる.

(4) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. したがって, $x < 0$ のとき $f'(x) > 0$ であり,
 $0 < x$ のとき $f'(x) < 0$ である. よって, $f(x)$ は $x < 0$ で増加, $0 < x$
で減少する.

また, $x = 0$ で極大値 $f(0) = 1$ をとる.

問題 2.

(1) $f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$. よって, $x = 1$ で $f'(x) = 0$ となり, 極
値をとる x の候補は $x = 1$. $f'(x)$ の符号は $x = 1$ で負から正に変化する.
よって, $x = 1$ で極小値 $f(1) = 4$ をとる.

(2) $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$. よって, $x = 1$ で $f'(x) = 0$ となり, 極値をとる
 x の候補は $x = 1$. $f'(x)$ の符号は $x = 1$ で正から負に変化する. よって,
 $x = 1$ で極大値 $f(1) = \frac{1}{e}$ をとる.

(3) $f'(x) = -\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$. よって, $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ で

$f'(x) = 0$ となり, 極値をとる x の候補は $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$. $f'(x)$ の符号は

$x = \frac{2}{3}\pi$ で負から正に変化し, $x = \frac{5}{3}\pi$ で正から負に変化する。よって,

$x = \frac{2}{3}\pi$ で極小値 $f(\frac{2}{3}\pi) = -2$, $x = \frac{5}{3}\pi$ で極大値 $f(\frac{5}{3}\pi) = 2$ をとる。

(4) $f'(x) = x(2 \log x + 1)$. よって, $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で $f'(x) = 0$ となり, 極値

をとる x の候補は $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. $f'(x)$ の符号は $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で負から正に変化する。

よって, $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$ をとる。

[微分の応用]

問題 1.

$$(1) v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 1, \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 2.$$

$$(2) v(t) = \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t$$

$$(3) v(t) = \frac{dx}{dt} = e^{-t}(\cos t - \sin t), \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -2e^{-t} \cos t.$$

問題 2.

$$(1) v(t) = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0 \text{ [m/s]}, \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -g \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

$$(2) v(t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{となる } t \text{ を求めると, } -gt + v_0 = 0 \text{ より}$$

$$t = \frac{v_0}{g} \text{ [s]. その時の位置は, } x\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} \text{ [m].}$$

$$(3) x(t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{となる } t \text{ を求めると, } -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t = 0 \text{ より}$$

$$t = \frac{2v_0}{g} \text{ [s]. その時の速度は, } v\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -g\left(\frac{2v_0}{g}\right) + v_0 = -v_0 \text{ [m/s].}$$

問題 3.

$$(1) v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{\alpha}(1 + e^{-\alpha t}) \text{ [m/s]}, \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -ge^{-\alpha t} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

$$(2) \text{常に } \frac{dv(t)}{dt} = a(t) < 0 \text{ なので } v(t) \text{ は減少する関数である。} t \text{ が十分}$$

に大きいとき $e^{-\alpha t}$ は 0 に近づくので, $v(t)$ は $\frac{g}{\alpha}$ に近づく。

問題 4. 円錐の底面の半径を r とし, 高さを h とする。側面を展開してできる扇形の半径を R , 中心角を θ とすると, $R\theta = 2\pi r \cdots(1)$ および $R^2 = h^2 + r^2 \cdots(2)$ が成り立つ。

また, 円錐の表面積 S は, $S = \frac{1}{2}R^2\theta + \pi r^2 \cdots(3)$ であり, 体積 V は,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdots(4) \text{ である。}$$

(1),(2),(3)から R と θ を消去すると, $h = \frac{\sqrt{S(S-2\pi r^2)}}{\pi r} \dots(5)$ 。さらに,

(5)を(4)に代入すると, $V = \frac{1}{3}r\sqrt{S(S-2\pi r^2)} \dots(6)$, $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ となる。

ここで, S は定数なので, V は r を変数とする関数とみなせる。

V を r で微分すると,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{S(S-2\pi r^2)} + r \cdot \frac{1}{2} \frac{(-4\pi Sr)}{\sqrt{S(S-2\pi r^2)}} \right) = \frac{1}{3} \frac{S(S-4\pi r^2)}{\sqrt{S(S-2\pi r^2)}}.$$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ で $\frac{dV}{dr} = 0$ となり, 極値をとる r の候補は $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 。 $\frac{dV}{dr}$ の

符号は $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ で正から負に変化する。よって, $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ で極大値

$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{2\pi}}$ をとり, この値が求める V の最大値となる。 $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ を(5)に

代入すると, $h = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$ 。したがって, $r:h = 1:2\sqrt{2}$ となる。

問題5. 円柱の底面の半径を r とし, 高さを h とする。このとき, コップの表面積 S は, $S = 2\pi rh + \pi r^2 \dots(1)$ であり, 体積 V は, $V = \pi r^2 h \dots(2)$ である。

(1),(2)から h を消去すると, $V = \frac{1}{2}r(S - \pi r^2) \dots(3)$, $0 < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ となる。

ここで, S は定数なので, V は r を変数とする関数とみなせる。

V を r で微分すると,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{2} \left((S - \pi r^2) + r \cdot (-2\pi r) \right) = \frac{1}{2} (S - 3\pi r^2). \quad r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \text{ で } \frac{dV}{dr} = 0 \text{ と}$$

なり, 極値をとる r の候補は $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ 。 $\frac{dV}{dr}$ の符号は $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ で正か

ら負に変化する。よって, $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ で極大値 $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{S^3}{3\pi}}$ をとり, この値が

求める V の最大値となる。このとき, $h = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ 。したがって,

$r:h = 1:1$ となる。