［文字式・式の展開］

問題１.

⑴ $-2a-3$

⑵ $5x^2+5y^2$

問題２.

⑴ $1^2+1\cdot(-1)+(-1)^2=1$

⑵ $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 1^2=25$

問題３.

⑴ コーヒー一杯, 紅茶一杯をそれぞれ x 円, y 円とすると, $y-x=d$.

⑵ $b=a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$

⑶ 初期状態で，A に含まれる食塩は，$100\times\dfrac{a}{100}=a$ [g]，B に含まれる食塩は，$100\times\dfrac{b}{100}=b$ [g].

A から B に 50g の食塩水を移した後に，A に含まれる食塩は，$50\times\dfrac{a}{100}=\dfrac{a}{2}$ [g]，B に含まれる食塩は，$b+50\times\dfrac{a}{100}=b+\dfrac{a}{2}$ [g]．また，A に含まれる食塩水は，50 [g]，B に含まれる食塩水は，150 [g].

B から A に 50g の食塩水を戻した後に，A に含まれる食塩は，

$\dfrac{a}{2}+50\times\dfrac{b+\frac{a}{2}}{150}=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b$ [g]. また, A に含まれる食塩水は, 100 [g] .

したがって，$c=100\times\dfrac{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b}{100}=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{3}b$

問題４.

⑴ $9x+6-4x+6=5x+12$

⑵ $y^2+2\cdot 2\cdot y+2^2=y^2+4y+4$

⑶ $a^2-2\cdot a\cdot(2b)+(2b)^2=a^2-4ab+4b^2$

⑷ $z^2-8z+7z-56=z^2-z-56$

⑸ $(3x)(2x)-(3x)\cdot 5+4(2x)-4\cdot 5=6x^2-7x-20$

(6) $x^3+3x^2\cdot 3+3x\cdot 3^2+3^3=x^3+9x^2+27x+27$

(7) $x^3-3x^2(2y)+3x(2y)^2-(2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

(8) $(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)=6x^2+2$

［因数分解］

問題１．

(1) $5x$ をくくりだして，$5x(x-4)$

(2) 5をくくりだして，$5(x^2-4)$．さらに，

$5(x^2-4)=5(x^2-2^2)=5(x-2)(x+2)$

(3) 掛けて-10, 足して 3 となる 2 つの数は-2 と 5. よって, $(x-2)(x+5)$

(4) $a^2-12a+36=a^2-2\cdot a\cdot 6+6^2=(a-6)^2$

(5) 掛けて 4 となる 2 数(4,1)と，掛けて−2 となる 2 数(1,-2)を組み合わせて，$4\times(-2)+1\times1=-7$ とできる．よって，$(4x+1)(x-2)$

(6) $x^2-4xy+4y^2=x^2-2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2=(x-2y)^2$

(7) $a^2-100=a^2-10^2=(a-10)(a+10)$

(8) $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$

(9) $$\begin{aligned}&8a^3-b^3=(2a)^3-b^3=(2a-b)((2a)^2+(2a)b+b^2)\\&=(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)\end{aligned}$$

(10) $x^4-1=(x^2)^2-1^2=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

［分数式］

問題１.

(1) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{(x+5)-x}{x(x+5)}=\dfrac{5}{x(x+5)}$

(2) $\dfrac{1}{3x+2}+2x-3=\dfrac{1+(2x-3)(3x+2)}{3x+2}=\dfrac{6x^2-5x-5}{3x+2}$

問題２.

(1) $\dfrac{x+1}{x^2}\times\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$

(2)

$$\frac{x^2-x+1}{x^2-1}\div\frac{x^3+1}{(x+1)^2}=\frac{(x^2-x+1)(x+1)^2}{(x^2-1)(x^3+1)}=\frac{(x^2-x+1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{1}{x-1}$$

問題３.

(1) $\dfrac{2}{x(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}$ とおく。右辺を通分すると

$\dfrac{2}{x(x+3)}=\dfrac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)}=\dfrac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}$．分子を比較すると,

$A+B=0, 3A=2$． A,B について解くと， $A=\dfrac{2}{3}$,　$B=-\dfrac{2}{3}$.

よって， $\dfrac{2}{x(x+3)}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

(2) $\dfrac{3x+4}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$ とおく。右辺を通分すると

$\dfrac{3x+4}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$． 分子を比較すると， $A+B=3, 3A+2B=4$． A,B について解くと， $A=-2$,　$B=5$.

よって， $\dfrac{3x+4}{(x+2)(x+3)}=-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{5}{x+3}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}$ とおく。右辺を通分すると

$\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}=\dfrac{(A+B)x+3(A-B)}{x^2-9}$． 分子を比較する

と，$A+B=0, 3(A-B)=1$． A, B について解くと，$A=\dfrac{1}{6},\quad B=-\dfrac{1}{6}$．

よって，$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

［1 次方程式と 1 次関数］

問題 1 .

(1) 両辺を -4 で割って $x=6$

(2) 移項して整理すると，$-x=4$．両辺を -1 で割って $x=-4$

(3) 両辺を 6 倍して分母を払うと $3x+2(x+1)=30$．整理すると，

$5x=28$．両辺を 5 で割って，$x=\dfrac{28}{5}$

問題 2 .

1 辺の長さが を a cm の立方体の表面積は $6a^2$ cm² である。

元の立方体の 1 辺の長さを x cm とすると，$6(x+1)^2-6x^2=7$．整理

すると，$12x+6=7$．解くと $x=\dfrac{1}{12}$．よって $\dfrac{1}{12}$ cm

問題 3 .

式を立てると，$2(2(2(2(2(2(2x+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1=7$．左辺

のカッコをはずして整理すると，$128x+127=7$．解くと $x=-\dfrac{15}{16}$．

問題 4 .

(1) $y-3=\dfrac{1}{4}(x-(-2))$．整理すると，$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$．

(2) $y-(-1)=0(x-2)$．整理すると，$y=-1$．

(3) まず，傾きを求めると，$\dfrac{(-3)-3}{4-(-6)}=-\dfrac{3}{5}$．よって，直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{3}{5}(x-(-6))$．整理すると，$y=-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{3}{5}$

(4) x 座標の等しい 2 点を通る直線なので, 直線の方程式は $x=c$ の形になる。点 $(2,5)$ を通るので，$x=2$

問題 5 .

(1) $y=-0.006x+b$

(2) 三保の松原のデータを(1)で求めた式に代入すると，

$20=-0.006\times 4+b$．よって，$b=20.02$．　式 $y=-0.006x+20.02$ に

富士山頂の標高 $x=3776$ を代入して，

$y=-0.06\times 3776+20.02=-2.6$ ℃

［連立方程式］

問題１．与えられた連立方程式の第１式，第２式をそれぞれ①，②と書く。

(1) ②より，$x=2y-2$．①に代入して，$-2(2y-2)+3y=1$．これを解くと，$y=3$．このとき，$x=2\times3-2=4$．

解は $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

(2) 2×①-②より y を消去すると．$3x=-3$．したがって，$x=-1$．これを①に代入すると，$5\times(-1)+2y=3$．よって，$y=4$．

解は $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

問題２．

往きのボートの速さは，v_0+v [km/h]，帰りのボートの速さは，v_0-v [km/h] となる。往きに進んだ距離 $(v_0+v)s$ [km] と帰りに進んだ距離 $(v_0+v)s$ [km] は等しいので，$s(v_0+v)=t(v_0-v)$ …① が成り立つ。また，往復に要した時間が１時間であることより，$s+t=1$ …② が成り立つ。①と②を解くと，$s=\dfrac{v_0-v}{2v_0}$，$t=\dfrac{v_0+v}{2v_0}$．

問題３．

全体の仕事量を１とすると，A さんと B さんの１日当たりの仕事量は，それぞれ $\dfrac{1}{12}$ と $\dfrac{1}{8}$ である。A さんと B さんが一人で仕事をしていた日数を x 日，y 日とする。このとき，A さんと B さんが行なったそれぞれの総仕事量は $\dfrac{1}{12}x$ と $\dfrac{1}{8}y$ である。よって，$\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{18}=1$ …① が成り立つ。また，14 日で仕事が完了したことより，$x+y=14$ …② が成り立つ。

①と②を解くと，$\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$．よって，8 日。

［不等式］

問題１.

⑴ $a<0$　⑵ $2 \leqq x<3$

問題２.

⑴ 移行すると $-2x<4$. 両辺を-2 で割ると $x>-2$. よって，$-2<x$

⑵ 移行すると $3x \geqq -5$. 両辺を3で割ると $x \geqq -\dfrac{5}{3}$. よって，$-\dfrac{5}{3} \leqq x$

⑶ 両辺に 12 を掛けて分母を払うと $4x<3x+12$. 移行して整理すると $x<12$

問題３.

この商品を 8 個買えることより，$8a \leqq 1000$. 両辺を 8 で割ると $a \leqq 125$ …①。一方，この商品を 9 個買えないことより，$9a>1000$. 両辺を 9 で割ると $a>\dfrac{1000}{9}$ …②。よって，①と②より $\dfrac{1000}{9}<a \leqq 125$

問題４.

この長方形の横の長さを t [m]，対角線の長さを x [m]とする。周の長さが 4 m であることより，この長方形の縦の長さは，$2-t$ [m] であり，とりうる t の範囲は，$0<t<2$. 三平方の定理より，$x^2=t^2+(2-t)^2$ …① が成り立つ。①の右辺を $f(t)$ と置き，平方完成すると，$f(t)=2(t^2-2t+2)=2(t-1)^2+2$. したがって，$f(t)$ は $t=1$ で最小値 2 をとり，$0<t<2$ の範囲で $f(t)<4$ となる。$x^2=f(t)$ であったので，$2 \leqq x^2<4$. よって，$\sqrt{2} \leqq x<2$.

［2 次方程式］

問題１.

⑴ $x=1,-\frac{5}{2}$

⑵ $x^2-x-30=(x+5)(x-6)=0$．よって， $x=-5,6$

⑶ $x^2-16x+64=(x-8)^2=0$．よって， $x=8$

⑷ $2x^2+7x+3=(x+3)(2x+1)=0$．よって， $x=-3,-\frac{1}{2}$

⑸ 両辺の平方根をとると， $x-7=\pm\sqrt{5}$．よって， $x=7\pm\sqrt{5}$

⑹ $x^2+x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=0$. したがって, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$.

両辺の平方根をとると， $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$．よって， $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

⑺ 移項して，$(3x-4)^2=9$．両辺の平方根をとると，$3x-4=\pm3$．よって， $x=\frac{1}{3},\frac{7}{3}$

⑻ 両辺の平方根をとると， $2x-5=\pm(x-8)$．よって， $x=-3$ または$3x=13$．したがって， $x=-3,\frac{13}{3}$

問題２.

直角をはさむ 2 辺の長さを x, y cm とすると $x^2+y^2=3^2\cdots①$ および

$\frac{xy}{2}=1\cdots②$ が成り立つ。①，②より，

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=9+4=13$．両辺の平方根をとると

$x+y>0$ であることより， $x+y=\sqrt{13}\cdots③$.　②，③より，

$x^2-\sqrt{13}x+2=0$．解の公式を使って解くと， $x=\frac{\sqrt{13}\pm\sqrt{5}}{2}$．このとき， $y=\frac{\sqrt{13}\mp\sqrt{5}}{2}$　（複号同順）.

よって，求める長さは $\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$ cm と $\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}$ cm。

問題３.

もとの立方体の 1 辺の長さを x cm とすると，$(x+1)^3-x^3=4$．整理すると，$x^2+x-1=0$．解くと $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．正の解のみ適するので，求める長さは $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ cm。

［２次関数のグラフ］

問題１.

⑴ 右辺を平方完成すると， $y=-(x-4)^2+16$．よって， $y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に 4， y 軸方向に 16 平行移動したものである。したがって，頂点(4,16)，軸 $x=4$，上に凸

⑵ 右辺を平方完成すると， $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$．よって， $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{2}$， y 軸方向に $\frac{3}{4}$ 平行移動したものである。したがって，頂点$(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$，軸 $x=-\frac{1}{2}$，下に凸

問題２.

⑴ $(x+2)(x-6)>0$．この不等式を満たす x の条件は,
「$x+2>0$ かつ $x-6>0$」または「$x+2<0$ かつ $x-6<0$」である。
つまり， $6<x$ または $x<-2$．よって， $x<-2,\ 6<x$

⑵ $x^2+4x+2=0$ の解を求めると $\alpha=-2-\sqrt{2},\beta=-2+\sqrt{2}$ である。$x^2+4x+2=(x-\alpha)(x-\beta)$ なので，不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$ を解けばよい。この不等式を満たす x の条件は $\alpha\leqq x\leqq\beta$．よって，
$-2-\sqrt{2}\leqq x\leqq -2+\sqrt{2}$

３.

$y=x(x-k)=(x-\frac{k}{2})^2-\frac{k^2}{4}$ より，頂点の座標は，$(\frac{k}{2},-\frac{k^2}{4})$.

(x,y)= $(\frac{k}{2},-\frac{k^2}{4})$ とおいて k を消去すると，軌跡が満たす方程式は

$y=-x^2$.

［グラフの変換］

問題１.

(1) $y-(-3)=(x-2)^2+1$．よって，$y=x^2-4x+2$

(2) $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=25$．よって，$\frac{x^2}{4}+y^2=25$

(3) $y=2(-x)-3$．よって，$y=-2x-3$

問題２.

(1) 元の直線の式を $y=ax+b$ とする。移動後の直線の式は,

$y-a=a(x-1)+b$．整理すると $y=ax+b$ となる。

(2) 移動後のグラフの式は, $\frac{y}{4}=a\left(\frac{x}{2}\right)^2$. 整理すると $y=ax^2$ となる。

(3) 移動後のグラフの式は, $-y=a(-x)^3$. 整理すると $y=ax^3$ となる。