■　２章　■

２−１　行列とその演算（p. 98）

練習問題

1　(1)　$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+1 & -2+3 & 7+(-5) \\ 3+2 & -5+1 & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

(2)　$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times1 & 3\times2 \\ 3\times(-3) & 3\times0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times3 \\ 2\times(-5) & 2\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 & 6-6 \\ -9-(-10) & 0-8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$

2　(1)　$X=B+A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 \\ 5+(-1) & -2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

（参考）　p.99 の側注のヒントにあるように，行列の和・差・スカラー倍の計算は，実数や多項式の場合と同じように扱うことができる。

上記の最初の等式は，題意の式 $X-A=B$ の両辺に行列 A を加えた（A を右辺に移項した）結果である。

(2)　$5X+B=2X+A$ より　（左辺の B，右辺の $2X$ を移項して）

$5X-2X=A-B$

よって

$$3X=A-B=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-3 & 1-4 \\ -1-5 & 4-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

したがって　$X=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}\times3 & \dfrac{1}{3}\times(-3) \\ \dfrac{1}{3}\times(-6) & \dfrac{1}{3}\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

3　(1)　$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+1\times4 & 1\times3+1\times5 \\ 0\times2+1\times4 & 0\times3+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(2)　$BA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times0 & 2\times1+3\times1 \\ 4\times1+5\times0 & 4\times1+5\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

(3)　$AEB=(AE)B=AB=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

（参考）　単位行列Eは，掛けることができれば，実数の積における 1 と同じように，掛けても変わらない。つまり，$AE=A$，$EB=B$ となるから，解答のようにABと等しく，問題(1)と同じ結果になる。

このことを実際に成分の計算で確認すると，次のようになる。

$$AEB=(AE)B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times0&1\times0+1\times1\\0\times1+1\times0&0\times0+1\times1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+1\times4&1\times3+1\times5\\0\times2+1\times4&0\times3+1\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\4&5\end{pmatrix}$$

(4)　$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times0&1\times1+1\times1\\0\times1+1\times0&0\times1+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

(5)　$A(B+A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+1\times4&1\times4+1\times6\\0\times3+1\times4&0\times4+1\times6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}7&10\\4&6\end{pmatrix}$$

（別解）　p.101 の側注の**補足（問題３）**にもあるように，多項式と同様に分配法則が成り立ち，$A(B+A)=AB+A^2$ となるから，問題(1)と(4)の解を用いて，次のように計算してもよい。

$$A(B+A)=AB+A^2=\begin{pmatrix}6&8\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1&8+2\\4+0&5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\4&6\end{pmatrix}$$

(6)　$E^3A=A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

（参考）　単位行列Eとの積は，(3)の参考に示した通り実数の積における 1 と同じような性質を持ち，$E^2=EE=E$，$E^3=E^2E=EE=E$ であるから，$E^3A=EA=A$ となる。

「行列AとBは交換可能であるか」の答

問題(1)(2)の結果より，$AB\neq BA$ であるから，行列AとBは交換可能でない。

2－2　逆行列・行列式 ── 行列と連立一次方程式(1)　(p.102)

練習問題

1　(1)　$|A|=3\times4-2\times5=2\neq0$ であるから，逆行列を持ち　$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-5&3\end{pmatrix}$

(2)　$|B| = 2\times9-3\times6=0$ であるから，逆行列を持たない。

(3)　$|C| = 5\times(-3)-(-4)\times4=1$ であるから，逆行列をもち　$\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-3 & -(-4)\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}$

2　$\begin{pmatrix}a & 2\\ -1 & a-3\end{pmatrix}$が逆行列を持たないから，行列式　$\begin{vmatrix}a & 2\\ -1 & a-3\end{vmatrix}=a\times(a-3)-2\times(-1)=0$

つまり　$a^2-3a+2=0$　であるから，$(a-1)(a-2)=0$

よって　$a=1$，2

（参考）　行列 A の行列式は $|A|$ で表すが，行列$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の行列式は，$\left|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right|$ と書かずに，普通（ ）を省いて $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ と書く。

3　(1)　$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\times4-1\times5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$　を　$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 9\end{pmatrix}$　の両辺に左から掛けて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\times3+(-1)\times9\\ (-5)\times3+2\times9\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

(2)　$\begin{vmatrix}6 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=6\times1-(-3)\times(-2)=0$　だから，$\begin{pmatrix}6 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ は逆行列を持たない。

与式を成分で表すと，　$\begin{cases}6x-3y=-9\\ -2x+\ \ y=\ 3\end{cases}$

これら 2 式は同じ関係式である。$x=t$　とおくと，$-2t+y=3$（または$6t-3y=-9$）であるから　$y=2t+3$　となるから，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 2t+3\end{pmatrix}$$（t は任意の実数）

4　問題の連立方程式を成分で表すと，$\begin{cases}4x+2y=ax\\ -x+y=ay\end{cases}$　であるから，右辺の項を左辺に移行すると，$\begin{cases}(4-a)x \quad +2y=0\\ \quad -x+(1-a)y=0\end{cases}$ … ① となる。

この連立方程式①は行列を用いて $\begin{pmatrix}4-a & 2\\ -1 & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$　… ② と表される。

もし逆行列 $\begin{pmatrix}4-a & 2\\ -1 & 1-a\end{pmatrix}^{-1}$ があれば，②の両辺にこの逆行列を左から掛けて，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

（注：参考１）となるから，　$x=0$，　$y=0$　以外の解を持たないことになってしまう。

したがって，$\begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$ は逆行列がないので，

$$\begin{vmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = (4-a)\times(1-a)-2\times(-1)=0$$

つまり　$a^2-5a+6=0$　であるから　$(a-2)(a-3)=0$　よって　$\underline{a=2\,,\,3}$ となる。

［$a=2$ のとき］

①より　$\begin{cases} (4-2)x+2y=0 \\ -x+(1-2)y=0 \end{cases}$　つまり　$\begin{cases} 2x+2y=0 \cdots ③ \\ -x-y=0 \cdots ④ \end{cases}$

③と④は同じ関係式であり，$x=t$ とおくと，$y=-t$ となるから，連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ （t は任意の実数）

［$a=3$ のとき］

①より　$\begin{cases} (4-3)x+2y=0 \\ -x+(1-3)y=0 \end{cases}$　つまり　$\begin{cases} x+2y=0 \cdots ⑤ \\ -x-2y=0 \cdots ⑥ \end{cases}$

⑤と⑥は同じ関係式であり，$y=t$ とおくと，$x=-2t$ となるから，連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （t は任意の実数）　（左の形の解を㋐とする。→参考２）

（参考１）　②の両辺に逆行列$\begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}^{-1}$を左から掛けたとき，

左辺は　$\begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

右辺は　$\begin{pmatrix} 4-a & 2 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，つまり零行列（列ベクトル）との積だから$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$となる。

（参考２）　$a=3$ のとき，$x=p$ とおくと，$y=-\dfrac{1}{2}p$ となるので，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -\dfrac{1}{2}p \end{pmatrix}$ $\cdots$ ㋑

としてもよいし，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\cdots$ ㋒ と表してもよい。

また㋑を　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\dfrac{p}{2} \\ (-1)\cdot\dfrac{p}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{p}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\cdots$ ㋓　（$q=\dfrac{p}{2}$ と置き換え

た。）と表してもよい。

例えば，㋐で $t=1$ のときの解は $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ となるが，これは㋑㋒で $p=-2$ の場合であり，㋓で $q=-1$ のときの解となっている。

すなわち，t や p , q は任意の実数であるから，解の表し方は異なっていても㋐㋑㋒㋓ともすべて同じ解となって（解全体の集合は一致して）いる。

5 (1) $\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{5\times1-2\times3}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}$ の両辺に左から掛けて

$$X=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\times2+2\times4&(-1)\times(-1)+2\times(-2)\\3\times2+(-5)\times4&3\times(-1)+(-5)\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3\\-14&7\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$ を $X\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}$ の両辺に右から掛けて

$$X=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-1)+(-1)\times3&2\times2+(-1)\times(-5)\\4\times(-1)+(-2)\times3&4\times2+(-2)\times(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&9\\-10&18\end{pmatrix}$$

6 (1) $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{1\times3-2\times1}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

(2) $P^{-1}AP=(P^{-1}A)P=\left\{\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3\times4+(-2)\times3&3\times(-2)+(-2)\times(-1)\\(-1)\times4+1\times3&(-1)\times(-2)+1\times(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\times1+(-4)\times1&6\times2+(-4)\times3\\(-1)\times1+1\times1&(-1)\times2+1\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(3) $(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}$ （示されている対角行列の公式を活用）

(4) $(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$ （$P^{-1}AP$ が n 個）

$=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$ （A が n 個，PP^{-1} が $n-1$ 個）

$=P^{-1}AEAEAE\cdots EAP$ （A が n 個，E が $n-1$ 個）

$=P^{-1}AAA\cdots AP=P^{-1}A^nP$

これと問題(3)の結果を合わせると，$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となる。

この両辺に，左から P を掛け，問題(1)で求めた P^{-1} を右から掛けると (※)

$$A^n=P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times 2^n+2\times 0 & 1\times 0+2\times 1\\ 1\times 2^n+3\times 0 & 1\times 0+3\times 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 2\\ 2^n & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^n\times 3+2\times(-1) & 2^n\times(-2)+2\times 1\\ 2^n\times 3+3\times(-1) & 2^n\times(-2)+3\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^n-2 & -2^{n+1}+2\\ 3\cdot 2^n-3 & -2^{n+1}+3\end{pmatrix}$$

(※)　$P^{-1}A^nP$ に左から P，右から P^{-1} を掛けると　$PP^{-1}A^nPP^{-1}=EA^nE=A^n$ となる。

２－３　掃出し法・階数 ── 行列と連立一次方程式(2)　(p. 106)

練習問題

1　(1)

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & 4 & 4\\ -2 & 5 & -5 & 1\\ 3 & -7 & 10 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+①×(−3)}]{\text{②+①×2}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 9\\ 0 & -1 & -2 & -7\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+②}]{\text{①+②×2}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 10 & 22\\ 0 & 1 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{②+③×(−3)}]{\text{①+③×(−10)}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

よって，$x=2$, $y=3$, $z=2$

（参考）　掃出し法で求める場合，その過程は同じでなくても，結論は同じになる。

(2)

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 11\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+①×(−2)}]{\text{②+①×(−1)}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & -2 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 7 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[\text{②}\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 7 & 5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{③+②×3}]{\text{①+②×(−1)}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{②+③×2}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

よって，$x=4$, $y=3$, $z=2$

(3)

$$\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & -1 & 7\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+①×(−2)}]{\text{②+①×(−1)}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -9 & -3\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+②×3}]{\text{①+②×(−2)}}\left(\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}\end{array}\right)$$

→（参考）

よって連立方程式は $\begin{cases} x \quad -2z=3 \\ \quad y+3z=1 \end{cases}$ と変形できることを意味する。

tを任意の数として　$z=t$　とおくと，$\begin{cases} x \quad -2t=3 \\ \quad y+3t=1 \end{cases}$ より解は，

$x=2t+3$, $y=-3t+1$, $z=t$ （tは任意の実数）

(4) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 1 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-1)]{②+①\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{③+②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

よって連立方程式は $\begin{cases} x-3y-2z=1 \\ \quad -4y\ +z=3 \\ 0x+0y+0z=5 \end{cases}$ と変形できることを意味するが，最後の式

$0x+0y+0z=5$ を満たす x, y, z はないから，この連立方程式の<u>解はない</u>。

（参考）　連立方程式を掃出し法で解を求めるには，p.108 の側注の二つ目の補足にあるように，拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に行の基本変形を用いて，$(E\,|\,\boldsymbol{c})$ の形，つまり左側の係数行列の部分が単位行列になるように変形していくが，変形の方法は何通りもある。

問題(1)(2)の場合と違って，問題(3)(4)では拡大係数行列が単位行列に変形できないが，係数行列の何行目か（今の場合，共に第 3 行）に 0 が並ぶところまで変形すればよい。この場合，その過程だけでなくそこまでの変形結果も何通りもあるが，解の集合は必ず同じとなる。

例えば，問題(4)の二つ目の変形において，次のように第②行を $-\dfrac{1}{4}$ 倍して，$(2\,,\,2)$ 成分を 1 とした後，第①行と第③行の第 2 列目の成分を掃出してもよい。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times(-4)]{①+②\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & 5 \end{array}\right)$$

この段階で，<u>係数行列の第 3 行に 0 が並ぶ</u>ので，単位行列に変形できなくなる。変形結果は上記と異なるが，この<u>拡大係数行列の第 3 行目</u>は，連立方程式では $0x+0y+0z=5$ を意味することから，この連立方程式は解を持たないことが分かる。つまり，解の集合は空集合である。

なお，上記問題(3)の解答の変形では，係数行列だけでなく，<u>拡大係数行列の第 3 行</u>

目にすべて 0 が並んでいる。これは，連立方程式では $0x+0y+0z=0$ を意味する。

この式は，x, y, z がどのような値でも成立するので，第 1 行目と第 2 行目の関係式を満たすものが解となる。今の場合，t の値を決めるごとに解 x, y, z が決まるので，解は無数にある。この場合，例えば，「s を任意の数として $x=s$ とおくと」など，解の表し方が異なっても，解の集合は必ず一致する。

2 (1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times(-1)]{①+②\times(-1)}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①+③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-2)]{②+①\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③+②\times(-3)}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[②+③\times 2]{①+③\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -13 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix} -13 & 6 & -2 \\ 11 & -5 & 2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-3)]{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times\frac{1}{2}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times 4]{①+②\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times(-1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[②+③\times\left(-\frac{1}{2}\right)]{①+③\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix} -11 & 3 & 2 \\ -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 　つまり $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22 & 6 & 4 \\ -9 & 3 & 1 \\ 14 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

（参考）　最後の行列は，見やすくするために $\frac{1}{2}$ をくくり出したもの。左側の行列とともに，どちらも同じ解の逆行列である。

2-4　一次変換（p. 110）

練習問題

1　(1)　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$　であるから，これらをまとめると

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$　よって　$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

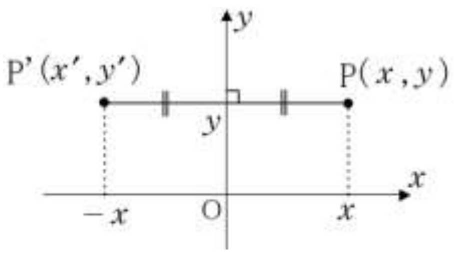
(2)　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$　であるから，これらをまとめると　$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

この式の両辺に右から　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1\times3-0\times2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　を掛けて

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6\times3+3\times(-2) & 6\times0+3\times1 \\ 7\times3+6\times(-2) & 7\times0+6\times1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)　点 P (x, y) が，y 軸に関する対称移動で，点 P′ (x', y') に移るとき，$x' = -x$，$y' = y$　である。



したがって，$\begin{cases} x' = (-1)x + 0y \\ y' = \quad 0x + 1y \end{cases}$ であるから，

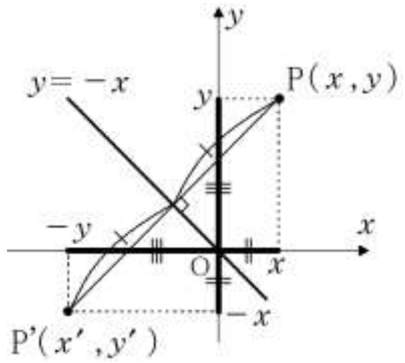
この一次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4)　点 P $(x,\ y)$ が，直線 $y=-x$ に関する対称移動で，

点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移るとき，$x'=-y$，$y'=-x$ である。

したがって，$\begin{cases} x' = \quad 0x+(-1)y \\ y'=(-1)x+ \quad 0y \end{cases}$ であるから，

この一次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



2　図形を原点を中心として反時計回りに $60°$ 回転する一次変換を表す行列は，**例題３**(3)の結果より

$$\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるから，この一次変換による２点 $\mathrm{A}(1,0)$，$\mathrm{B}(4,2)$ の像は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 4+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

よって，　$\mathrm{A}'\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}'\left(2-\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{3}+1\right)$

3　(1)　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+1\times(-4) \\ 8\times 3+2\times(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$ であるから，点 $(2,16)$

(2)　直線 $y=-x$ 上の任意の点 P $(t,-t)$ の f による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times t+1\times(-t) \\ 8\times t+2\times(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 6t \end{pmatrix}$$

つまり　$x'=t$，$y'=6t$ であるから，t を消去すると　$y'=6x'$

t は任意の数だから求める像は，直線　$y=6x$

（参考）　t が変化するとき，x' は全実数値を取るので，直線 $y=6x$　全体に移る。

これは p.112 の側注にある**補足**の(イ)の場合である。

(3)　直線 $y=2x+3$　上の任意の点 P $(t, 2t+3)$ の f による像を P′ (x', y') とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times t+1\times(2t+3) \\ 8\times t+2\times(2t+3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4t+3 \\ 12t+6 \end{pmatrix}$$

つまり　$x'=4t+3$，$y'=12t+6$　であるから，t を消去すると

$t=\dfrac{x'-3}{4}$　より　$y'=12t+6=12\times\dfrac{x'-3}{4}+6=3(x'-3)+6=3x'-3$

t は任意の数だから求める像は，直線　$y=3x-3$