［行列とその演算］（p. 144）

問題１　(1)　$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 4+(-2) & -3+(-3) \\ -5+2 & -3+3 & 1+(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2)　$5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times 2 & 5\times(-3) \\ 5\times 5 & 5\times 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4\times(-1) & 4\times(-5) \\ 4\times 5 & 4\times 6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 10-(-4) & -15-(-20) \\ 25-20 & 10-24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}$

問題２　(1)　$X+A=2B$　より

$X=2B-A=2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2-2 & 6-(-3) \\ 8-1 & 4-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

(2)　$4X+A=X-2A$　より　$3X=-3A$　であるから

$X=-A=-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

(3)　$2(X-A)=B$　より　$2X-2A=B$

したがって，$2X=B+2A$　であるから

$X=\dfrac{1}{2}(B+2A)=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

問題３　(1)　$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times 3+3\times 1+5\times(-2) & 4\times 6+3\times 0+5\times(-4) \\ 1\times 3+(-2)\times 1+4\times(-2) & 1\times 6+(-2)\times 0+4\times(-4) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=4\times 2+5\times(-1)=3$

(3)　$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times 4 & 5\times(-2) \\ 2\times 4 & 2\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

(4)　$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times 2+3\times(-3) & 5\times(-1)+3\times 4 \\ 2\times 2+1\times(-3) & 2\times(-1)+1\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times5+(-1)\times2 & 2\times3+(-1)\times1 \\ (-3)\times5+4\times2 & (-3)\times3+4\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$$

問題４ (1) $$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times3+2\times2 & 1\times1+2\times5 \\ 0\times3+1\times2 & 0\times1+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $$BA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times1+1\times0 & 3\times2+1\times1 \\ 2\times1+5\times0 & 2\times2+5\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) (2)の結果を用いて

$$BAB=(BA)B=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times3+7\times2 & 3\times1+7\times5 \\ 2\times3+9\times2 & 2\times1+9\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 38 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$$

（別解） (1)の結果を用いて

$$BAB=B(AB)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times7+1\times2 & 3\times11+1\times5 \\ 2\times7+5\times2 & 2\times11+5\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 38 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}$$

(4) (1)の結果を用いて

$$EAEB=AB=\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(5) $$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times2+2\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times2+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) (5)の結果を用いて

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+4\times0 & 1\times2+4\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times2+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（別解） $$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times4+2\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times4+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（参考） $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+b+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+b+c+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ $\cdots$ が成立する。

特に, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

(7) $$(A+B)A=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+2 & 1+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times1+3\times0 & 4\times2+3\times1\\ 2\times1+6\times0 & 2\times2+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ 2 & 10\end{pmatrix}$$

(8)　(5)と(2)の結果を用いれば

$$A^2+BA=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 4+7\\ 0+2 & 1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 11\\ 2 & 10\end{pmatrix}$$

（参考）　これは(7)の結果と同じで，p.101 の側注の**補足（問題３）**にあるように，分配法則が成り立っていることを確認できる。また，成分の計算をせず，分配法則を用いて，$A^2+BA=(A+B)A$ と変形して(7)の結果を用いるという別解もある。

(9)　$E^2A=(EE)A=EA=A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

「行列 A と B は交換可能であるかどうか」の答

(1)(2)の結果から，$AB\neq BA$　であるから，行列 A と B は交換可能でない。

［逆行列・行列式―行列と連立一次方程式(1)］(p. 144)

問題１　(1)　$|A|=5\times2-1\times3=7\neq0$　であるから，逆行列を持ち　$A^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

(2)　$|B|=(-4)\times(-6)-3\times8=0$　であるから，逆行列を持たない。

(3)　$|C|=4\times5-3\times7=-1\neq0$　であるから，逆行列をもち

$$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

問題２　$\begin{pmatrix}a & 3\\ 4 & a+1\end{pmatrix}$ が逆行列をもたないから，行列式　$\begin{vmatrix}a & 3\\ 4 & a+1\end{vmatrix}=a\times(a+1)-3\times4=0$

つまり　$a^2+a-12=0$　であるから　$(a+4)(a-3)=0$　よって　$a=-4\ ,\ 3$

問題３　(1)　$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{4\times3-1\times5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}$　を　$\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 9\end{pmatrix}$　の両辺に左から掛けて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\times10+(-1)\times9\\ (-5)\times10+4\times9\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}21\\ -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

(2)　$\begin{vmatrix}8 & 4\\ -4 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-4\times4=0$　であるから，$\begin{pmatrix}8 & 4\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ は逆行列を持たない。

与式を成分で表すと，　$\begin{cases}8x+4y=-4\\ -4x-2y=\ 2\end{cases}$

これら 2 式は同じ関係式である。 $x=t$ とおくと, $-4t-2y=2$ (または$8t+4y=-4$)であるから　$y=-2t-1$ となるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t-1 \end{pmatrix}$$ (t は任意の実数)

問題 4　問題の連立方程式を成分で表すと, $\begin{cases} 4x+y=ax \\ 3x+2y=ay \end{cases}$ であるから,右辺の項を左辺に移行すると, $\begin{cases} (4-a)x \quad +y=0 \\ 3x+(2-a)y=0 \end{cases}$ … ① となる。

連立方程式①は行列を用いて $\begin{pmatrix} 4-a & 1 \\ 3 & 2-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ … ② と表される。

もし逆行列 $\begin{pmatrix} 4-a & 1 \\ 3 & 2-a \end{pmatrix}^{-1}$ があれば,②の両辺にこの逆行列を左から掛けて $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから, $x=0$, $y=0$ 以外の解を持たないことになってしまう。

したがって, $\begin{pmatrix} 4-a & 1 \\ 3 & 2-a \end{pmatrix}$ は逆行列がないので

$$\begin{vmatrix} 4-a & 1 \\ 3 & 2-a \end{vmatrix} = (4-a)\times(2-a)-1\times 3=0$$

つまり　$a^2-6a+5=0$　であるから　$(a-1)(a-5)=0$　よって　$\underline{a=1\,,\,5}$ となる。

[$a=1$ のとき]

①より $\begin{cases} (4-1)x+y=0 \\ 3x+(2-1)y=0 \end{cases}$ 　つまり $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$

2 式は同じで, $x=t$ とおくと, $y=-3t$ となるから,連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (t は任意の実数)

[$a=5$ のとき]

①より $\begin{cases} (4-5)x+y=0 \\ 3x+(2-5)y=0 \end{cases}$ 　つまり $\begin{cases} -x+y=0 & \cdots ③ \\ 3x-3y=0 & \cdots ④ \end{cases}$

③と④は同じ関係式であり, $x=t$ とおくと, $y=t$ となるから,連立方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (t は任意の実数)

問題５　(1)　$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7\times 3 - 4\times 5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$　を　$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$　の

両辺に左から掛けて

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 9 + (-4)\times 7 & 3\times 6 + (-4)\times 5 \\ (-5)\times 9 + 7\times 7 & (-5)\times 6 + 7\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)　$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$　を　$X\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$　の両辺に右から掛けて

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\times 3 + 6\times(-5) & 9\times(-4) + 6\times 7 \\ 7\times 3 + 5\times(-5) & 7\times(-4) + 5\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

問題６　(1)　$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1\times 2 - 1\times 1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$P^{-1}AP = (P^{-1}A)P = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 5 + (-1)\times 4 & 2\times(-2)\times + (-1)\times(-1) \\ (-1)\times 5 + 1\times 4 & (-1)\times(-2) + 1\times(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 1 + (-3)\times 1 & 6\times 1 + (-3)\times 2 \\ (-1)\times 1 + 1\times 1 & (-1)\times 1 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)　$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（示されている対角行列の公式を活用）

(4)　$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$　（$P^{-1}AP$ が n 個）

$= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$　（A が n 個，PP^{-1} が $n-1$ 個）

$= P^{-1}AEAEAE\cdots EAP$　（A が n 個，E が $n-1$ 個）

$= P^{-1}AAA\cdots AP = P^{-1}A^nP$

これと(3)の結果を合わせると　$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　となる。

この両辺に，左から P を掛け，問題(1)で求めた P^{-1} を右から掛けると

$$A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 3^n + 1\times 0 & 1\times 0 + 1\times 1 \\ 1\times 3^n + 2\times 0 & 1\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n\times 2 + 1\times(-1) & 3^n\times(-1) + 1\times 1 \\ 3^n\times 2 + 2\times(-1) & 3^n\times(-1) + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 1 & -3^n + 1 \\ 2\cdot 3^n - 2 & -3^n + 2 \end{pmatrix}$$

［掃出し法・階数―行列と連立一次方程式(2)］(p. 145)

問題１　(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & 4 \\ 2 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+①×(−2)}]{\text{②+①×(−3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+②×3}]{\text{①+②×2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②+③×2}]{\text{①+③×4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

よって， $x=7$, $y=3$, $z=1$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 \\ -2 & 9 & 15 & -9 \\ 5 & -9 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+①×(−5)}]{\text{②+①×2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \\ 0 & 6 & 19 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}\times\frac{1}{3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 19 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+②×(−6)}]{\text{①+②×3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{②+③×(−3)}]{\text{①+③×(−6)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

よって， $x=6$, $y=2$, $z=-1$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 16 & 7 \\ 1 & -1 & 12 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+①×(−3)}]{\text{②+①×(−1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 16 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 10 & -40 & -20 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+②×(−10)}]{\text{①+②×2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって連立方程式は $\begin{cases} x \quad +8z=3 \\ y-4z=-2 \end{cases}$ と変形できることを意味する。

t を任意の数として　$z=t$　とおくと， $\begin{cases} x \quad +8t=3 \\ y-4t=-2 \end{cases}$ より解は，

$x=-8t+3$, $y=4t-2$, $z=t$ （t は任意の実数）

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③+①×(−4)}]{\text{②+①×(−2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -20 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③+②×(−5)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

よって連立方程式は $\begin{cases} x+y+6z=3 \\ \qquad y-4z=-2 \\ 0x+0y+0z=7 \end{cases}$ と変形できることを意味するが，最後の式

$0x+0y+0z=7$　を満たす x, y, z はないので，この連立方程式の解はない。

問題２　(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{③+①×(−2)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\0&-3&-2&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{②×(−1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&0\\0&-3&-2&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+②×3}]{\text{①+②×(−2)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&2&0\\0&1&1&0&-1&0\\0&0&1&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{②+③×(−1)}]{\text{①+③}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&1\\0&1&0&2&2&-1\\0&0&1&-2&-3&1\end{array}\right)$$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-1\\-2&-3&1\end{pmatrix}$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&0&0\\3&-1&0&0&1&0\\5&-2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+①×(−5)}]{\text{②+①×(−3)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&0&0\\0&-1&9&-3&1&0\\0&-2&17&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{②×(−1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&0&0\\0&1&-9&3&-1&0\\0&-2&17&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{③+②×2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&0&0\\0&1&-9&3&-1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{③×(−1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&1&0&0\\0&1&-9&3&-1&0\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{②+③×9}]{\text{①+③×3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&6&-3\\0&1&0&-6&17&-9\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right)$$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix}-2&6&-3\\-6&17&-9\\-1&2&-1\end{pmatrix}$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-4&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\5&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+①×(−5)}]{\text{②+①×(−3)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-4&1&0&0\\0&-5&12&-3&1&0\\0&-8&19&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{②}\times\left(-\frac{1}{5}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-4&1&0&0\\0&1&-\frac{12}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&-8&19&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{③+②×8}]{\text{①+②×(−2)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&1&-\frac{12}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&0&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{8}{5}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times(-5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[②+③\times\frac{12}{5}]{①+③\times\left(-\frac{4}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 19 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 \end{array}\right)$$

よって　求める逆行列は $\begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 3 & 19 & -12 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

［一次変換］（p. 145）

問題 1　(1)　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$　であるから，これらをまとめると

$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$　つまり　$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$

(2)　$A\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$　であるから，これらをまとめると　$A\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

この式の両辺に右から　$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3\times5-2\times7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$　を掛けて

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times5+4\times(-7) & 6\times(-2)+4\times3 \\ 5\times5+3\times(-7) & 5\times(-2)+3\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

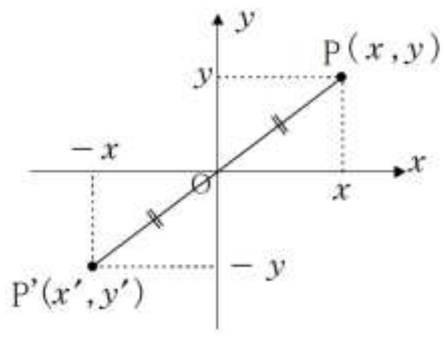
(3)　点 P (x, y) が，原点に関する対称移動で，点 P′ (x', y') に移るとき，

$x' = -x$，$y' = -y$

である。

したがって，$\begin{cases} x' = (-1)x + 0y \\ y' = 0x + (-1)y \end{cases}$ であるから，

この一次変換を表す行列は　$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

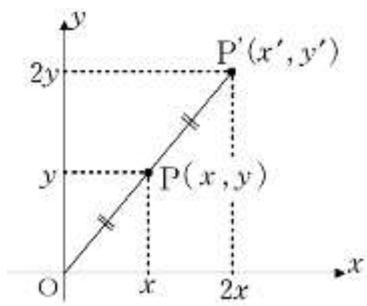


(4)　点 P (x, y) が，原点を中心として 2 倍に拡大する移動で，点 P′ (x', y') に移るとき，

$x' = 2x$，$y' = 2y$

である。

したがって，$\begin{cases} x' = 2x + 0y \\ y' = 0x + 2y \end{cases}$ であるから，



この一次変換を表す行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

問題２　図形を原点を中心として反時計回りに$30°$回転する一次変換を表す行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

であるから，この一次変換による２点$\mathrm{A}(0,1)$，$\mathrm{B}(4,2)$の像は

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 1 \\ \frac{1}{2}\times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times 4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 2 \\ \frac{1}{2}\times 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって，　$\mathrm{A}'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}'\left(2\sqrt{3}-1\,,\,2+\sqrt{3}\right)$

問題３　(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-1)+3\times 3 \\ 8\times(-1)+4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$　であるから，点$(8,4)$

(2)　直線$y=-x$　上の任意の点$\mathrm{P}\ (t,-t)$の f による像を$\mathrm{P}'\ (x', y')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times t+3\times(-t) \\ 8\times t+4\times(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 4t \end{pmatrix}$$

つまり　$x'=-2t$，$y'=4t$　であるから，tを消去すると

$t=-\frac{1}{2}x'$　より　　$y'=4t=4\left(-\frac{1}{2}x'\right)=-2x'$

tは任意の数だから求める像は，直線　$y=-2x$

(3)　直線$y=3x+2$上の任意の点$\mathrm{P}\ (t,3t+2)$の f による像を$\mathrm{P}'\ (x', y')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 3t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times t+3\times(3t+2) \\ 8\times t+4\times(3t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t+6 \\ 20t+8 \end{pmatrix}$$

つまり　$x'=10t+6$，$y'=20t+8$　であるから，tを消去すると

$t=\frac{x'-6}{10}$　より　　$y'=20t+8=20\cdot\frac{x'-6}{10}+8=2x'-4$

tは任意の数だから求める像は，直線　$y=2x-4$