■　１章　■

４－１　不定積分（p. 56）

問題１　積分定数をCとする。（以下同じ）

(1)　$\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$　　(2)　$\displaystyle\int 1\,dx=x+C$

(3)　$\displaystyle\int x^{-4}dx=\frac{1}{-3}x^{-3}+C=-\frac{1}{3}x^{-3}+C$　　(4)　$\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+C$

問題２　(1)　$\displaystyle\int (x^3+2x^2+3x-2)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$

(2)　$\displaystyle\int\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(2+\frac{3}{x}-4x^{-2}\right)dx=2x+3\log|x|+4x^{-1}+C$

$\displaystyle=2x+3\log|x|+\frac{4}{x}+C$

練習問題

1　(1)　$\displaystyle\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$　　(2)　$\displaystyle\int\frac{1}{x^4}dx=\int x^{-4}dx=\frac{1}{-3}x^{-3}+C=-\frac{1}{3x^3}+C$

(3)　$\displaystyle\int\sqrt[5]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{5}}dx=\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{6}x\,x^{\frac{1}{5}}+C=\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+C$

(4)　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$

(5)　$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C$　　(6)　$\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$

2　(1)　$\displaystyle\int(x^2+3x-1)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$

(2)　$\displaystyle\int\frac{x^5+2x^2-3}{x^3}dx=\int\left(\frac{x^5}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}\right)dx=\int\left(x^2+\frac{2}{x}-3x^{-3}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}x^3+2\log|x|-\frac{3}{-2}x^{-2}+C=\frac{1}{3}x^3+2\log|x|+\frac{3}{2x^2}+C$

(3)　$\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}e^x-3\sin x\right)dx=\frac{1}{2}e^x+3\cos x+C$

(4) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-2\cos x\right)dx=5\tan x-2\sin x+C$

(5) $\displaystyle\int\left(3x-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(3x-2+\frac{3}{x}-x^{-2}\right)dx=\frac{3}{2}x^2-2x+3\log|x|+x^{-1}+C$

$\displaystyle=\frac{3}{2}x^2-2x+3\log|x|+\frac{1}{x}+C$

(6) $\displaystyle\int\left(x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{5}{3}}\right)dx=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+2x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}-6x^{-\frac{2}{3}}+C$

４－２　不定積分の計算（p. 58）

問題１　(1) $t=x^2+1$ とおくと，$dt=2x\,dx$　　したがって　$x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$ であるから

$$\int x\sin(x^2+1)dx=\int\sin(x^2+1)\cdot x\,dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=\frac{1}{2}(-\cos t)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+C$$

（参考）　$x\,dx$ を $\dfrac{1}{2}dt$ に置き換えるとき，$\dfrac{1}{2}$ の前に積の記号（・や×）を付け加えること。

(2) $\log x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}dx=dt$　　したがって

$$\int\frac{(\log x)^2}{x}dx=\int(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(\log x)^3+C$$

(3) $1-x=t$ とおくと，$x=-t+1$　　したがって　$dx=-dt$ であるから

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx=\int(-t+1)t^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C\quad\left(=\frac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C\right)$$

（参考）　$1-x=t$　より　$-dx=dt$ を導いてから　$dx=-dt$　としてもよい。

なお，$dx=-dt$ であるからといって，$\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$ を $\displaystyle\int(1-t)\sqrt{t}-dt$ と書いてはいけない。$-dt$ は $(-1)\,dt$ と見なして，(1)の（参考）と同じように，その前が積であることに注意しよう。

また，$\displaystyle\int (1-t)t^{\frac{1}{2}}(-dt)$ と書いてもいけない。

（別解）　次のように変数変換をして計算してもよい。

$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$1-x=t^2$ である。

したがって　$x=-t^2+1$　より　$dx=-2t\,dt$ であるから

$$\int x\sqrt{1-x}\,dx=\int(-t^2+1)t\cdot(-2t)\,dt=\int(2t^4-2t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$

$$=\frac{2}{5}\left(\sqrt{1-x}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+C\quad\left(=\frac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C\right)$$

練習問題

1　(1)　$\left((2x+3)^4\right)'=4(2x+3)^3\cdot(2x+3)'=4\cdot 2(2x+3)^3$ であるから，

$$\int(2x+3)^3dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(2x+3)^4+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$$

（別解）　置換積分を用いて，$2x+3=t$ とおくと，$2dx=dt$ より　$dx=\dfrac{1}{2}dt$ であるから，$\displaystyle\int(2x+3)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$

(2)　$\displaystyle\int\cos(3x-1)\,dx=\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$

(3)　$\displaystyle\int\frac{1}{3-2x}dx=\frac{1}{-2}\log|3-2x|+C=-\frac{1}{2}\log|3-2x|+C$

2　(1)　$x^3+1=t$ とおくと，$3x^2dx=dt$ より，$x^2dx=\dfrac{1}{3}dt$ であるから

$$\int x^2(x^3+1)^2dx=\int(x^3+1)^2x^2\,dx=\int t^2\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{9}(x^3+1)^3+C$$

(2)　$e^x+2=t$ とおくと，$e^xdx=dt$ であるから

$$\int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\int\frac{1}{e^x+2}\cdot e^x\,dx=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C=\log(e^x+2)+C$$

（注）　$\log|t|=\log|e^x+2|$ であるが，$e^x+2>0$ であるから上のように絶対値を付け

なくてもよい。ただし，この場合（ ）は必要で，$\log e^x + 2$ としてはいけない。

3　(1)　$\displaystyle\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

（参考）　上の部分積分で，まず $\cos x$ を積分するとき，積分定数は何にしてもよい（結果は同じとなる）ので通常 0 とする。補充問題の解説，p.142 の問題 3(4)の解答の（参考）も参照のこと。

(2)　$\displaystyle\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

（参考）　$\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ であるから，結果は $xe^x - e^x - C$ なるが，積分定数 C は，任意の数であるから，$-C$ を改めて C と書き直している。

(3)　$\displaystyle\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot(\log x)'\,dx$

$$= x\log x - \int 1dx = x\log x - x + C$$

4－3　定積分（p. 60）

問題１　(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2+4x-5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{3} + 2\left[x^2\right]_{-1}^{3} - 5\left[x\right]_{-1}^{3}$

$$= \frac{1}{3}(3^3-(-1)^3) + 2(3^2-(-1)^2) - 5(3-(-1)) = \frac{16}{3}$$

（参考）　$\displaystyle\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1) + 2\cdot(-1)^2 - 5(-1)\right)$

としてもよい，上記のように項ごとに計算した方が簡単になる場合が多い。

(2)　$\displaystyle\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{16}x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^{16} = 2\left[x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{16} = 2\left(16^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right) = 2(4-1) = 6$

(3)　$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$

(4)　$\displaystyle\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

練習問題

1　(1)　$\displaystyle\int_2^5 dx = \Big[\, x \,\Big]_2^5 = 5-2=3$

(2)　$\displaystyle\int_1^2 \frac{x+2}{x^2}dx = \int_1^2\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x}+2x^{-2}\right)dx = \left[\log|x| + \frac{2}{-1}x^{-1}\right]_1^2$

$\displaystyle = (\log 2-\log 1)-2\left(\frac{1}{2}-1\right) = \log 2+1$

（注）積分区間は $1 \leqq x \leqq 2$ であるから，$\log|x|$ を $\log x$ としてもよい。

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}e^x dx = \frac{1}{3}\Big[\, e^x \,\Big]_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)$

(4)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x}dx = 2\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right) = 2(1-0)=2$

４－４　定積分の計算（p. 62）

問題１　(1)　$t=2x$ とおくと，$dt=2dx$ より $dx=\dfrac{1}{2}dt$ で

x	$0 \to \dfrac{\pi}{4}$
t	$0 \to \dfrac{\pi}{2}$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

(2)　$t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ で

x	$e \to e^2$
t	$1 \to 2$

であるから

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log x} = \int_e^{e^2}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \Big[\log|t|\Big]_1^2 = \log 2-\log 1 = \log 2$$

（参考）　$\log e = \log_e e = 1$，$\log e^2 = \log_e e^2 = 2$

(3)　$t=x^3$ とおくと，$dt=3x^2dx$ より $x^2dx=\dfrac{1}{3}dt$ で

x	$0 \to 2$
t	$0 \to 8$

であるから

$$\int_0^2 x^2e^{x^3}dx = \int_0^2 e^{x^3}\cdot x^2\,dx = \int_0^8 e^t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\Big[\, e^t \,\Big]_0^8 = \frac{1}{3}(e^8-1)$$

(4)　$t=1-x$ とおくと，$x=-t+1$ より $dx=-dt$ で

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$$\int_0^1 x(1-x)^4\,dx=\int_1^0(-t+1)t^4(-1)\,dt=\int_1^0(t^5-t^4)\,dt=\left[\frac{1}{6}t^6-\frac{1}{5}t^5\right]_1^0$$

$$=\frac{1}{6}(0-1)-\frac{1}{5}(0-1)=\frac{1}{30}$$

（注意）　$t=1-x$ より $dt=-dx$ であるから，$dx=-dt$ となるが，(1)〜(3)と違って，ここでは $x=1-t$ と，x を t で表しておく必要がある。変数を t に変換する場合，$\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^4dx$ を $\displaystyle\int_1^0 xt^4(-1)dt$ のように変数 x を一部残しておくことはできない。x は積分変数 t と無関係な定数ではないので，これを $\displaystyle -x\int_1^0 t^4dt$ などと変形することはできない。

問題２　(1)　$$\int_0^\pi x\sin x\,dx=\int_0^\pi x(-\cos x)'\,dx=\Big[\;x(-\cos x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(x)'(-\cos x)\,dx$$

$$=\pi(-\cos\pi)-0+\int_0^\pi\cos x\,dx=\pi+\Big[\;\sin x\;\Big]_0^\pi=\pi+(\sin\pi-\sin 0)=\pi$$

(2)　$$\int_0^1 xe^{2x}dx=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1(x)'\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

練習問題

1　(1)　$t=2x-1$ とおくと，$dt=2dx$ より $dx=\dfrac{1}{2}dt$ で

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 3$

であるから

$$\int_1^2\sqrt{2x-1}\,dx=\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(3\cdot3^{\frac{1}{2}}-1\right)=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

（別解）　$\left((2x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x-1)'=3\sqrt{2x-1}$ に気づけば，置換積分を用い

なくても、$\int_1^2 \sqrt{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left\{(2\cdot 2-1)^{\frac{3}{2}} - (2\cdot 1-1)^{\frac{3}{2}}\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$ として求めることができる。

(2) $t = 2x+1$ とおくと，$dt = 2dx$ より $dx = \frac{1}{2}dt$ で

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 3$

であるから

$$\int_0^1 e^{2x+1}\,dx = \int_1^3 e^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^3 = \frac{1}{2}(e^3 - e)$$

(3) $t = e^x + 1$ とおくと，$dt = e^x dx$ で

x	$0 \to 1$
t	$2 \to e+1$

であるから

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{2}{e^x+1}\cdot e^x\,dx = \int_2^{e+1}\frac{2}{t}dt = 2\left[\log t\right]_2^{e+1} = 2\left\{\log(e+1) - \log 2\right\}$$

$$= 2\log\frac{e+1}{2}$$

（参考） $\log M - \log N = \log\frac{M}{N}$

2 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x dx$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

(2) $\int_1^e x^3\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^4\right)'\log x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4(\log x)'\,dx$

$$= \frac{1}{4}(e^4\log e - \log 1) - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^e = \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}(e^4-1) = \frac{1}{16}(3e^4+1)$$

(3) $\int_0^2 (x+1)e^x dx = \int_0^2 (x+1)(e^x)'dx = \left[(x+1)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (x+1)'e^x dx$

$$= 3e^2 - 1 - \int_0^2 e^x\,dx = 3e^2 - 1 - \left[e^x\right]_0^2 = 3e^2 - 1 - (e^2 - 1) = 2e^2$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx = \int_0^1 x^2(e^x)'dx = \Big[x^2e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (x^2)'e^x dx = e - \int_0^1 2x(e^x)'dx$

$\displaystyle = e - \left\{\Big[2xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (2x)'e^x dx\right\} = e - 2e + 2\int_0^1 e^x dx = -e + 2\Big[e^x\Big]_0^1 = -e + 2(e-1)$

$= e - 2$

４－５　原始関数を計算できる関数（p.64）

問題１　(1) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)dx = \log|x| + \log|x+2| + C = \log|x(x+2)| + C$

（参考）上記で被積分関数を部分分数に分解する方法の例

$\displaystyle\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$　とする。

両辺に x を掛けて，$\displaystyle\frac{2x+2}{x+2} = A + \frac{Bx}{x+2}$　としてから　$x=0$　を代入すると　$A=1$

両辺に $x+2$ を掛けて，$\displaystyle\frac{2x+2}{x} = \frac{A(x+2)}{x} + B$　としてから　$x=-2$　を代入すると　$B=1$

（参考）　$\log M + \log N = \log MN$，　$|M|\times|N| = |M\times N|$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right) = \int\left(\frac{1}{x}+x^{-2}+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle = \log|x| - x^{-1} + \log|x+1| + C = -\frac{1}{x} + \log|x(x+1)| + C$

（参考）上記被積分関数の部分分数に分解する方法の例

$\displaystyle\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$　とする。

両辺に x^2 を掛けて約分してから $x=0$　を代入すると　$B=1$
両辺に $x+1$ を掛けて約分してから $x=-1$　を代入すると　$C=1$

したがって　$\displaystyle\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$　となるから，$x=1$　を代入して A を求める。

(3)　（$(x^2+1)' = 2x$　に気づけば）　$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

（別解）　$x^2+1=t$　とおくと，$2x\,dx = dt$　より　$x\,dx = \dfrac{1}{2}dt$　であるから

$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(4) $t=\dfrac{x}{2}$ とおくと， $x=2t$ で $dx=2dt$ であるから

$$\int\frac{1}{x^2+4}dx=\int\frac{1}{4t^2+4}\cdot 2\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\tan^{-1}t+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

練習問題

1 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{\pi}{4}$$

（参考） 半角公式 $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ を $\theta=2x$ として用いた。

積分では，等式 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$， $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ をよく使う。

(2) $\displaystyle\int_2^3\frac{2}{(x-1)(x+1)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\Big[\log|x-1|-\log|x+1|\Big]_2^3$

$$=(\log 2-\log 4)-(\log 1-\log 3)=\log\frac{2\cdot 3}{4}=\log\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right)-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=1-\frac{\pi}{4}$

（参考） 上の変形は，三角関数の公式 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ の両辺を $\cos^2 x$ で割って得られる公式 $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を活用している。

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

（別解） $x=\tan t$ とおくと， $dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)\,dt$ （(3)の参考の公式を参照）

で，

x	$0\to 1$
t	$0\to\dfrac{\pi}{4}$

と考えて

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot(1+\tan^2 t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dt=\Big[t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

４－６　面積と体積（p. 66）

練習問題

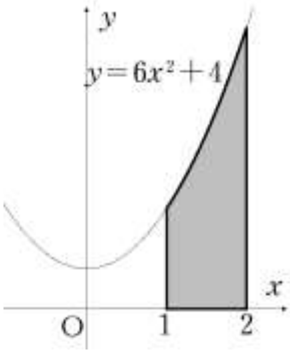
1　(1)　$S=\int_1^2(6x^2+4)dx=\Big[\ 2x^3+4x\ \Big]_1^2=2(8-1)+4(2-1)=18$

(2)　$S=\int_1^3\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^3=\log 3$

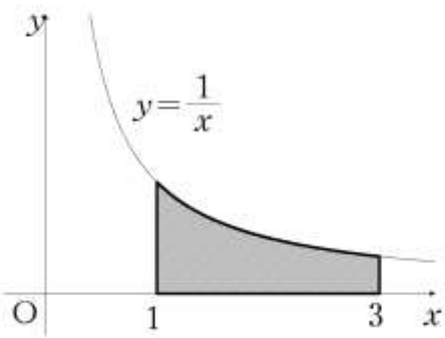
(3)　$S=\int_0^1(e^x-x)\,dx=\Big[e^x-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\Big(e^1-\frac{1}{2}\Big)-e^0=e-\frac{3}{2}$

(4)　$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,dx=\Big[\ (x-\sin x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\Big(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\Big)=\frac{\pi}{2}-1$

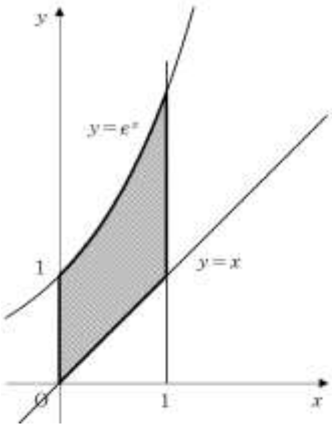
（参考）(1)



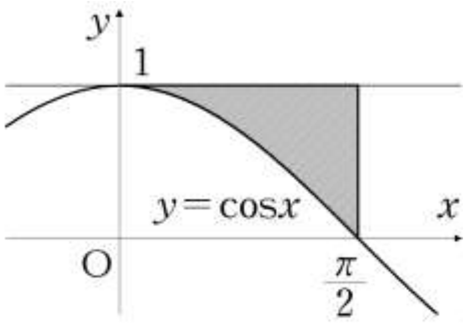
(2)



(3)



(4)



2　(1)　$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\Big[r^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r}=\pi r^2\Big[\ x\ \Big]_{-r}^{r}-\frac{\pi}{3}\Big[\ x^3\ \Big]_{-r}^{r}$

$=\pi r^2\{r-(-r)\}-\frac{\pi}{3}\{r^3-(-r)^3\}=\frac{4}{3}\pi r^3$

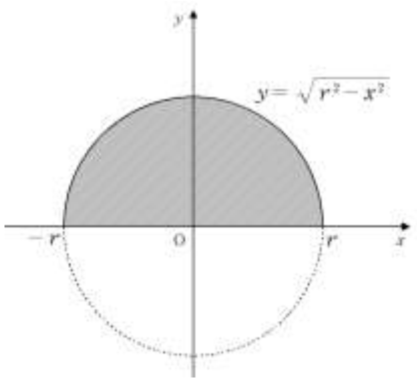
(2) $V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^3 x^{-2}dx=\pi\left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_0^3=-\pi\left[\frac{1}{x}\right]_1^3=-\pi\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}\pi$

(3) $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

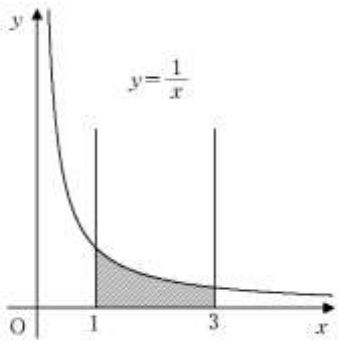
$$=\pi\left\{\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right\}=\frac{\pi^2}{2}$$

(4) $V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

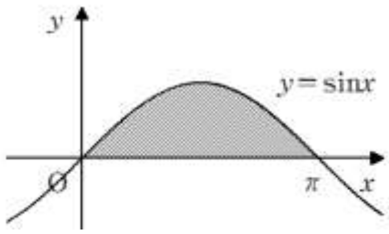
（参考）(1) 回転体は半径 r の球であり，結論は球の体積の公式である。



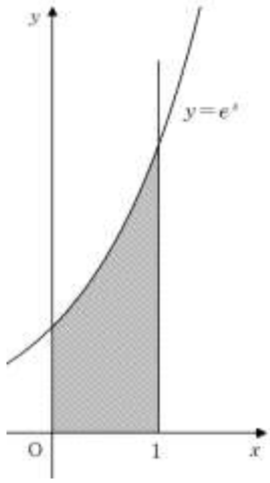
(2)



(3)



(4)



4－7　定積分の応用（p. 68）

練習問題

1　(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4n^2 - 1^2} + \frac{n}{4n^2 - 2^2} + \frac{n}{4n^2 - 3^2} + \cdots + \frac{n}{4n^2 - n^2} \right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{4 - \left(\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{4 - \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} dx = \int_0^1 \frac{-1}{(x+2)(x-2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \Big[\log|x+2| - \log|x-2| \Big]_0^1 = \frac{1}{4} \left\{ (\log|3| - \log|-1|) - (\log|2| - \log|-2|) \right\} = \frac{1}{4} \log 3$$

2 $x = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3, \cdots,\ 0.9,\ 1.0$ に対して，$\dfrac{1}{1+x}$ の値 $y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_9, y_{10}$ の値は次の表のようになるから

x	$y =$	$\frac{1}{1+x}$
0.0	$y_0 =$	1.000
0.1	$y_1 =$	0.909
0.2	$y_2 =$	0.833
0.3	$y_3 =$	0.769
0.4	$y_4 =$	0.714
0.5	$y_5 =$	0.667
0.6	$y_6 =$	0.625
0.7	$y_7 =$	0.588
0.8	$y_8 =$	0.556
0.9	$y_9 =$	0.526
1.0	$y_{10} =$	0.500

$$\log 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \cong \frac{1}{20} \left\{ y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) + y_{10} \right\}$$
$$= 0.693 \cdots \cong 0.69$$