［不定積分・不定積分の計算］（p. 141）

問題１　積分定数をCとする。（以下同じ。）

(1)　$\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$

(2)　$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(3)　$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

(4)　$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x\,x^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2 x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

問題２(1)　$\int\left(x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}\right)dx = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - \frac{5}{2}x + C$

(2)　$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\left(1 - \frac{3}{x} + 2x^{-2}\right)dx$

$= x - 3\log|x| - 2x^{-1} + C = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$

(3)　$\int(3\sin x - 4\cos x)\,dx = -3\cos x - 4\sin x + C$

(4)　$\int\left(5e^x - \frac{3}{x}\right)dx = 5e^x - 3\log|x| + C$

(5)　$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 2x^{\frac{1}{2}} - \tan x + C = 2\sqrt{x} - \tan x + C$

問題３(1)　$\int(3x+5)^2 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x+5)^3 + C = \frac{1}{9}(3x+5)^3 + C$

(2)　$\int \sin(3x-2)\,dx = \frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{3}\cos(3x-2) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-2) + C$

(3)　$\int \frac{1}{1-x}dx = \frac{1}{-1}\log|1-x| + C = -\log|1-x| + C$

（別解）　$\int \frac{1}{1-x}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx = -\log|x-1| + C$

ここで，$|1-x|=|x-1|$ であるから，同じ結果となっている。

問題４(1)　$x^2+1=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$　したがって $x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$ であるから

$$\int x(x^2+1)^3\,dx=\int (x^2+1)^3\cdot x\,dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{8}(x^2+1)^4+C$$

(2)　$x^3+2=t$ とおくと，$3x^2dx=dt$　したがって，$x^2dx=\dfrac{1}{3}dt$ であるから

$$\int\frac{x^2}{x^3+2}dx=\int\frac{1}{x^3+2}\cdot x^2\,dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\log|t|+C=\frac{1}{3}\log|x^3+2|+C$$

問題５

(1)　$$\int(2x-1)\sin x\,dx=\int(2x-1)(-\cos x)'dx=(2x-1)(-\cos x)-\int(2x-1)'(-\cos x)dx$$

$$=-(2x-1)\cos x+2\int\cos x\,dx=-(2x-1)\cos x+2\sin x+C$$

(2)　$$\int(x+1)e^x dx=\int(x+1)(e^x)'dx=(x+1)e^x-\int(x+1)'e^x\,dx$$

$$=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

(3)　$$\int x^2\log x\,dx=\int\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3(\log x)'dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3+C=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C$$

［定積分・定積分の計算・原始関数を計算できる関数］（p. 141）

問題１　以下では(7)~(12)を置換積分で計算しているが，変数を置き換えずに積分してもよい。また，(3)～(6)を置換積分で計算した場合の変数変換の例を[ ]に記しておく。

(1)　$$\int_1^5(2x+3)\,dx=\Big[x^2+3x\Big]_1^5=\Big[x^2\Big]_1^5+3\Big[x\Big]_1^5=(5^2-1^2)+3(5-1)=36$$

(2)　$$\int_1^e\frac{x+2}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=\int_1^e\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\Big[x+2\log|x|\Big]_1^e$$

$$=\Big[\ x\ \Big]_1^e+2\Big[\ \log|\,x\,|\ \Big]_1^e=(e-1)+2(\log e-\log 1)=e+1$$

（参考）　積分区間が正の範囲であるから絶対値をつけず，$\log x$ と書いてもよい。

$\log e=\log_e e=1$，$\log 1=\log_e 1=0$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{3}\,dx=\left[-3\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}=-3\left[\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)=-3\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{2}$

[$\dfrac{x}{3}=t$]

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{0}e^{1-2x}dx=\left[\frac{1}{-2}e^{1-2x}\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}(e^1-e^3)=\frac{1}{2}(e^3-e)$　　[$1-2x=t$]

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\log|\,2x+1\,|\right]_0^1=\frac{1}{2}(\log 3-\log 1)=\frac{1}{2}\log 3$　　[$2x+1=t$]

(6) $\displaystyle\int_{-1}^{4}\sqrt{8-x}\,dx=\int_{-1}^{4}(8-x)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{-1}(8-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{4}=-\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)$

$\displaystyle=-\frac{2}{3}\left((2^2)^{\frac{3}{2}}-(3^2)^{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{2}{3}(2^3-3^3)=-\frac{2}{3}(8-27)=\frac{38}{3}$　　[$8-x=t$]

(7) $5-x=t$ とおくと，$-dx=dt$　したがって $dx=-dt$ で

x	$1\to 4$
t	$4\to 1$

であるから

$$\int_1^4\frac{2}{\sqrt{5-x}}dx=\int_4^1\frac{2}{\sqrt{t}}\cdot(-1)\,dt=-2\int_4^1 t^{-\frac{1}{2}}dt=-2\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_4^1=-4\left(1^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}}\right)=-4(1-2)=4$$

(8) $1+\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$　しがって $\sin x\,dx=-dt$ で

x	$0\to\dfrac{\pi}{2}$
t	$2\to 1$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos x)^3}\cdot\sin x\,dx=\int_2^1 t^{-3}\cdot(-1)\,dt=\left[-\frac{1}{-2}t^{-2}\right]_2^1$$

$$=\frac{1}{2}(1^{-2}-2^{-2})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(9) $\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$ で

x	$0\to\dfrac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(10)　$\tan x = t$　とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt$　で

x	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$0 \to 1$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 (t^3 + 1)\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

(11)　$\log x = t$　とおくと，$\dfrac{1}{x}dx = dt$　で

x	$2 \to e$
t	$\log 2 \to 1$

であるから

$$\int_2^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}} dx = \int_2^e (\log x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_2^e t^{-\frac{1}{2}} dt = \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_{\log 2}^1 = 2\left(1^{\frac{1}{2}} - (\log 2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2(1 - \sqrt{\log 2})$$

(12)　$2 - x = t$　とおくと，$x = -t + 2$　より　$dx = -dt$　で

x	$-2 \to 1$
t	$4 \to 1$

であるから

$$\int_{-2}^1 \frac{3x}{\sqrt{2-x}} dx = \int_4^1 \frac{3(-t+2)}{\sqrt{t}} \cdot (-1)\ dt = \int_4^1 \left(\frac{3t}{\sqrt{t}} - \frac{6}{\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \int_4^1 \left(3t^{\frac{1}{2}} - 6t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = \left[3 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot 2t^{\frac{1}{2}}\right]_4^1 = 2\left(1^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) - 12\left(1^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2(1-8) - 12(1-2) = -2$$

問題２　(1)　$$\int_0^\pi x \cos x\, dx = \int_0^\pi x(\sin x)' dx = \left[x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \sin x\, dx$$

$$= \pi \sin \pi - 0 - \int_0^\pi \sin x\, dx = -\left[-\cos x\right]_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -2$$

(2)　$$\int_0^\pi (x - \pi) \sin x\, dx = \int_0^\pi (x-\pi)(-\cos x)' dx$$

$$= \left[(x-\pi)(-\cos x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)'(-\cos x)\, dx$$

$$= 0 - (-\pi)(-\cos 0) + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = -\pi + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = -\pi + (\sin\pi - \sin 0) = -\pi$$

(3) $$\int_0^1 (2x-1)e^x dx = \int_0^1 (2x-1)(e^x)' dx = \Big[(2x-1)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (2x-1)' e^x dx$$

$$= e^1 - (-e^0) - \int_0^1 2e^x dx = e + 1 - 2\Big[e^x\Big]_0^1 = e + 1 - 2(e^1 - e^0) = 3 - e$$

(4) $$\int_0^1 (x+1)\log(x+1)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+1)^2\right)' \log(x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \log(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(x+1)^2 (\log(x+1))' dx$$

$$= \frac{1}{2}(2^2 \log 2 - \log 1) - \int_0^1 \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1}\,dx = 2\log 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)\,dx$$

$$= 2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = 2\log 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

（参考）　$x+1$ の積分を，上のように $\frac{1}{2}(x+1)^2$ とすれば，後の計算が簡単である。

これに気づかず $\frac{1}{2}x^2 + x$ とした場合の計算例を別解として示す。別解と上の解との違いは，$x+1$ を積分した場合の積分定数の違いである。つまり部分積分で，積の関数の一方を積分する場合，積分定数は何であっても結果は同じになるが，上の解では $\frac{1}{2}$ としているのに対して，以下の解では 0 としているため，その後の積分のため式変形に工夫がいる。

（別解）　$$\int_0^1 (x+1)\log(x+1)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' \log(x+1)\,dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)(\log(x+1))' dx$$

$$=\frac{3}{2}\log 2-\int_0^1 \frac{x^2+2x}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{3}{2}\log 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+x-\log|x+1|\right]_0^1=\frac{3}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1-\log 2\right)=2\log 2-\frac{3}{4}$$

(5) $$\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=\int_0^\pi x^2(-\cos x)'dx=\Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi (x^2)'(-\cos x)\,dx$$

$$=\pi^2(-\cos\pi)+\int_0^\pi 2x\cos x\,dx=\pi^2+\int_0^\pi 2x(\sin x)'\,dx$$

$$=\pi^2+\Big[2x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi (2x)'\sin x\,dx=\pi^2+(2\pi\sin\pi-0)-2\int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$=\pi^2-2\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=\pi^2+2(\cos\pi-\cos 0)=\pi^2-4$$

(6) $$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 x^2(-e^{-x})'\,dx=\Big[x^2(-e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1 (x^2)'(-e^{-x})\,dx$$

$$=-e^{-1}+\int_0^1 2xe^{-x}\,dx=-e^{-1}+\int_0^1 2x(-e^{-x})'\,dx=-e^{-1}+\Big[2x(-e^{-x})\Big]_0^1-\int_0^1 (2x)'(-e^{-x})\,dx$$

$$=-e^{-1}-2e^{-1}+2\int_0^1 e^{-x}\,dx=-3e^{-1}+2\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-3e^{-1}-2(e^{-1}-1)=2-\frac{5}{e}$$

問題３　(1) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

(2) $$\int_2^3\frac{1}{x(x-1)}\,dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\Big[\log|x-1|-\log|x|\Big]_2^3$$

$$=(\log 2-\log 3)-(\log 1-\log 2)=\log\frac{2\cdot 2}{3}=\log\frac{4}{3}$$

（参考）　$\log M+\log N=\log MN$，　$\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

ここで　$\cos x = t$　とおくと，$-\sin x\,dx = dt$　したがって　$\sin x\,dx = -dt$　で，

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \dfrac{\pi}{4} \\ \hline t & 0 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{t}\cdot(-1)\,dt = -\Big[\ \log|t|\ \Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log 1\right) = -\log\left(\sqrt{2}\right)^{-1} = \log\sqrt{2}$$

（別解）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\Big[\ \log|\cos x|\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

と，変数変換をせずに（置換積分を使わずに）計算してもよい。

（参考）　$\log M^p = p\log M$

(4)　$x = \sin t$ とおいて，

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \dfrac{1}{2} \\ \hline t & 0 \to \dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

と考えると，$dx = \cos t\,dt$　であり，

t　がこの範囲にある場合　$\cos t > 0$　であるから

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$$

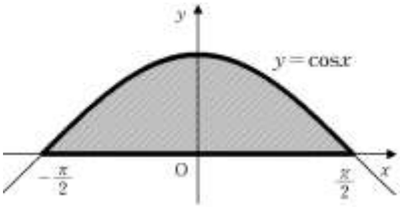
したがって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1dt = \Big[\ t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

［面積と体積・定積分の応用］（p. 142）

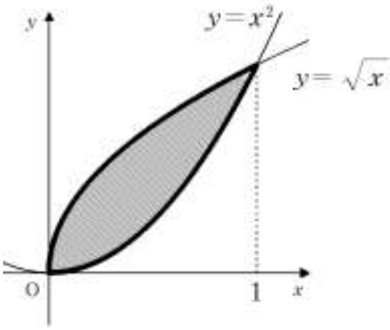
問題１　(1)　$\displaystyle S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2$

(2)　$\displaystyle S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

（参考）(1)



(2)



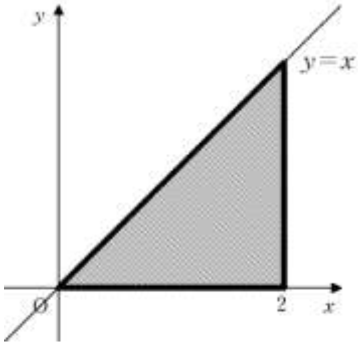
問題２　(1)　$V=\pi\int_0^2 x^2\,dx=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}\pi$

（参考）　回転体は，底面が半径２の円で，高さが２の円すいである。

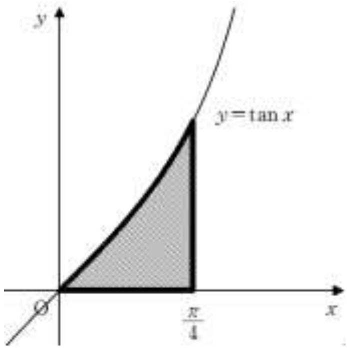
(2)　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

（参考）(1)



(2)



問題３　(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=\int_0^1(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2\left(2^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2}-2$$

（参考）　題意の式を和の記号Σを用いて表すと $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ となる。

問題４　$x=0$，0.2，0.4，0.6，$\cdots$，1.8，2.0 に対して，$\dfrac{1}{1+x}$ の値 y_0，y_1，y_2，y_3，$\cdots$，y_9，y_{10} の値は次の表のようになるから

x	$y=$	$\frac{1}{1+x}$
0.0	$y_0=$	1.000
0.2	$y_1=$	0.833
0.4	$y_2=$	0.714
0.6	$y_3=$	0.625
0.8	$y_4=$	0.556
1.0	$y_5=$	0.500
1.2	$y_6=$	0.455
1.4	$y_7=$	0.417
1.6	$y_8=$	0.385
1.8	$y_9=$	0.357
2.0	$y_{10}=$	0.333

$$\log 3=\int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx \cong \frac{2}{20}\left\{y_0+2(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9)+y_{10}\right\}$$

$$=1.101\cdots \cong 1.10$$