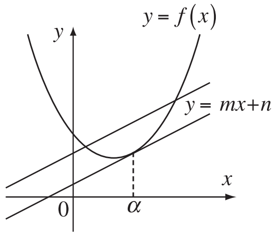
ワンポイント教材

ワンポイント教材アーカイブ

恒等式の利用

―恒等式と曲線の接線―

数学Ⅱで学ぶ恒等式について，その積極的な活用を考えてみよう。



曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $l: y=mx+n$ との交点の x 座標は，方程式 $f(x)=mx+n$ すなわち

$$f(x)-(mx+n)=0 \quad \cdots ①$$

の実数解である。

特に，曲線Cと l が $x=\alpha$ に対応する点で接するとき，方程式①は，重解 $x=\alpha$ をもつ。

ゆえに，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が $x=\alpha$ で接するとき，

$$(ax^2+bx+c)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$$

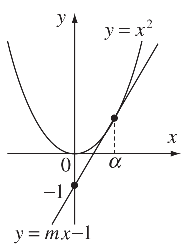
が恒等的に成り立つ。

このことを利用して，放物線の接線を求めることができる。

例題１　点 (0，-1) から放物線 $y=x^2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

＜解＞求める接線の方程式を

$$y=mx-1,$$



接点の x 座標を α とするとき，

$$x^2=mx-1$$

は，重解 $x=\alpha$ をもつ。

よって，$x^2-(mx-1)=(x-\alpha)^2$ が恒等的に成り立つ。

この両辺の各項の係数を比較して，

$$m=2\alpha, \ 1=\alpha^2$$

ゆえに，$\alpha \pm 1$，$m=\pm 2$

したがって，求める接線の方程式は，

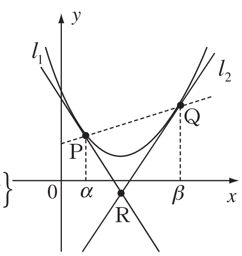
$$y=\pm 2x-1$$

(終)

次のような問題も，恒等式の性質を利用すれば容易に解くことができる。

例題２　放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の $x=\alpha$，β に対応する点P，Qにおける接線 l_1，l_2 の交点Rの x 座標を α，β で表せ。

＜解＞交点Rの座標を (s, t) とし，Rを通る直線の傾きを m とすると，その方程式は $y=m(x-s)+t$



これが，放物線と点Pで接することから，

$$ax^2+bx+c-\{m(x-s)+t\}=a(x-\alpha)^2$$

が恒等的になりたつ。

よって，両辺の各項の係数を比較して，

$$b-m=-2a\alpha, \ c+ms-t=a\alpha^2$$

これらより m を消去すると，

$$(2a\alpha+b)s=a\alpha^2-c+t \quad \cdots ①$$

同様に，点Qで接することから，

$$(2a\beta+b)s=a\beta^2-c+t \quad \cdots ②$$

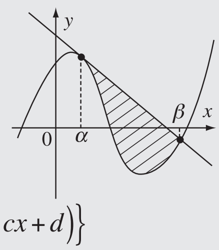
①－②より，$s=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　(終)

一般に，$f(x)$，$g(x)$ を x の整式とするとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+n$ が接するとき，

$$f(x)-(mx+n)=(x-\alpha)^2 g(x)$$

が成り立つ。

〈参考〉 上の式変形を利用すれば，右の図における曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ と $x=\alpha$ での接線 $y=mx+n$ とで囲まれた図形の面積 S も容易に求めることができる。



$$S=\int_\alpha^\beta\{mx+n-(ax^3+bx^2+cx+d)\}$$

$$=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx \qquad x-\beta=(x-\alpha)+(\alpha-\beta)$$

$$=-\left\{a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3 dx+a(\alpha-\beta)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx\right\}$$

$$=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

※ 過去に掲載されたワンポイント教材を一部修正して再掲載しております。

通巻第 75 号　©編修･発行　実教出版株式会社　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町 5

2017年　9月 25日　発行　TEL. 03-3238-7777

代表者　戸塚雄弐

http://www.jikkyo.co.jp/