ワンポイント教材

元海城中学校高等学校　大和澄夫先生のワンポイント教材③

自然対数の底　と　千慮の一失 ～仕事算のジレンマ～

算数の問題で仕事算というのを覚えているでしょうか。「6 人で 24 日かかる仕事は 12 人では何日，24 人では何日かかるか」という問題です。人数が増えれば増えるほど早く仕事が終わるというものです。しかし，実際には人が増えると勘違いなど作業ミスをする人も多くなるので，「仕事算」のようには行かないことが予想されます。

船頭多くして？　～巨大プロジェクトの壁～

ひとつのミスも許されない仕事があり，100 回に 1 回しかミスを起こさないような人 100 人が携わる場合，この仕事がミスなしで終わる確率は，次のように計算できます。

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100} \fallingdotseq 0.366032$$

1000 回に 1 回しかミスを起こさない（千慮の一失）ような人 1000 人が携わる場合，この仕事が終わる確率は

$$\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000} \fallingdotseq 0.367694$$

さらに，10000 回に 1 回しかミスをしない人が 10000 人では，次のとおりです。

$$\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{10000} \fallingdotseq 0.367811$$

どうやら，n を限りなく大きな自然数とすると数列 $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ は，ある一定の値（約 $\frac{1}{3}$ ）に限りなく収束しそう（近づきそう）です。このように，携わる人や部品が増えていくとき，その個々の人や部品の精度が増え方以上に改善されていないとプロジェクトの成功率は上がりません。このことは，人間を月に送りこむというアポロ計画の初期において，使用する部品の個数を 10 倍にするごとにひとつひとつの部品の精度を 10 倍（誤動作率を $\frac{1}{10}$ ）にするのではこの計画の成功率が約 $\frac{1}{3}$ しか見込めないこととして認識されました。そこで，部品の誤動作率を $\frac{1}{1000000}$ 以下にしなければならないという結論が出され，「999999」という標語ができたということです。

実は，この極限値の逆数 e がとても興味のある数，**自然対数の底（ネイピアの数）**e なのです。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}\fallingdotseq\frac{1}{3}$$

e の値（概説）

n を自然数とするとき，二項定理を用いて次の数列の極限値を考えます。

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

$$=1-{}_nC_1\frac{1}{n^2}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n^2}\right)^2-\cdots$$

$$+(-1)^k\,{}_nC_k\left(\frac{1}{n^2}\right)^k+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$=1-\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\right)^n$$

ここで，n を無限大とすれば，右辺の 1 以外の項は全て 0 に収束するので，この数列は 1 に収束します。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=1 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

（この箇所は専門書等で確認してください）

再び，二項定理を用い数 e を求めてみます。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+\cdots+{}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

n を無限大とすると，次の形に収束します（ね！）。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

$$\boxed{e=2.718281828459045\cdots}$$