第６章　ワークシート解答

１．　図１のように電流を定めると，キルヒホッフの第一法則（電流則）と第二法則（電圧則）より，

$$i_r(t)+i_L(t)=I,\ L\frac{di_L(t)}{dt}=ri_r(t)$$ となる。

これらから電流 $i_r(t)$ を消去すると $\frac{L}{r}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=I$ を得る。

一般解は，$i_1(t)=ke^{-\frac{r}{L}t}$ [A] となり，特解は $i_2(t)=I$ [A] となるので，初期条件 $i_L(0)=0\,\mathrm{A}$ を適用すると

$$i_L(t)=I\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)$$ [A] となる。

よって，$v(t)=ri_r(t)=r\left(I-i_L(t)\right)=rIe^{-\frac{r}{L}t}$ [V] となる。　　（答）

２．　図２のように電流を定めると，キルヒホッフの第二法則（電圧則）と第一法則（電流則）より，

$$ri(t)+v(t)=E,\ v(t)=Ri_r(t),\ i_r(t)+i_C(t)=i(t),\ i_C(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$ となる。

これらから電流を消去すると $Cr\frac{dv(t)}{dt}+\left(1+\frac{r}{R}\right)v(t)=E$ を得る。

一般解は，$v_1(t)=ke^{-\frac{1}{CR}\left(1+\frac{R}{r}\right)t}$ [V] となり，特解は $v_2(t)=\frac{R}{r+R}E$ [V] となるので，

初期条件 $v(0)=0\mathrm{V}$ を適用すると

$$v(t)=\frac{R}{r+R}E\left(1-e^{-\frac{1}{CR}\left(1+\frac{R}{r}\right)t}\right)$$ [V] となる。　　（答）

３．　図３のように電流を定めると，キルヒホッフの第一法則（電流則）と第二法則（電圧則）より，

$$i(t)=i_C(t)+i_r(t)=C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R},\ ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+v(t)=E$$ となり $i(t)$ を消去すると，

電圧に関する微分方程式 $LC\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\left(rC+\frac{L}{R}\right)\frac{dv(t)}{dt}+\left(\frac{r}{R}+1\right)v(t)=E$ を得る。

$r=2,\ R=1,\ C=2,\ L=1,\ I=1,\ E=3$ とすると

$$2\frac{d^2v(t)}{dt^2}+5\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=3$$ と表される。

特性方程式は $2s^2+5s+3=0$ となり $s=-1,\ -1.5$，すなわち $\alpha_1,\ \alpha_2=-1,\ -1.5$ の異なる二つの実解となるので（Ｉ）の場合となる。

式６−72 より一般解は，$v_1(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-1.5t}$ [V] となる。

式６−75 より特解は，$v_2(t)=1\mathrm{V}$ となる。

よって，未定係数を含む解は $v(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-1.5t}+1$ [V] となる。

また，$i(t)=2\frac{dv(t)}{dt}+v(t)=-k_1e^{-t}-2k_2e^{-1.5t}+1$ [A] となり，

初期条件$v(0)=0\mathrm{V}$，$i(0)=0\,\mathrm{A}$ より$k_1=-3$，$k_2=2$となる。
したがって，電圧と電流は

$$v(t)=-3e^{-t}+2e^{-1.5t}+1\,[\mathrm{V}],\ i(t)=3e^{-t}-4e^{-1.5t}+1\,[\mathrm{A}]$$ となる。　　（答）

４．　図４のように電流を定めると，キルヒホッフの第一法則（電流則）と第二法則（電圧則）より，

$i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)=I$，$v(t)=Ri_R(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}$となり，

さらに$i_C(t)=C\dfrac{dv(t)}{dt}=LC\dfrac{d^2i_L(t)}{dt^2}$となる。

電流則の式において，$i_R(t)$および$i_C(t)$を消去すると，

インダクタ電流に関する微分方程式$LC\dfrac{d^2i_L(t)}{dt^2}+\dfrac{L}{R}i_L(t)+i_L(t)=I$を得る。

(1)　$R=1$，$C=0.5$，$L=2$，$I=1$とすると，$\dfrac{d^2i_L(t)}{dt^2}+2\dfrac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=1$と表される。

特性方程式は$s^2+2s+1=0$となり$s=-1$の重解となるので（Ⅱ）の場合となる。

式6―73 より一般解は，$i_{L1}(t)=k_1e^{-t}+k_2te^{-t}\,[\mathrm{A}]$となる。

式6―75 より特解は，$i_{L2}(t)=1\,\mathrm{A}$ となる。

よって，未定係数を含む解は$i_L(t)=k_1e^{-t}+k_2te^{-t}+1\,[\mathrm{A}]$となり，初期条件$i_L(0)=0\,\mathrm{A}$ より$k_1=-1$となる。

また，$v(t)=2\dfrac{di_L(t)}{dt}=2e^{-t}+2k_2e^{-t}-2k_2te^{-t}\,[\mathrm{V}]$となり，$v(0)=0\mathrm{V}$ より$k_2=-1$となる。

したがって，インダクタ電流は$i_L(t)=1-e^{-t}-te^{-t}\,[\mathrm{A}]$となる。　　（答）

(2)　$R=2$，$C=0.25$，$L=2$，$I=1$とすると，$0.5\dfrac{d^2i_L(t)}{dt^2}+\dfrac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=1$と表される。

特性方程式は$0.5s^2+s+1=0$となり$s=-1\pm j$，
すなわちα_1，$\alpha_2=-1+j$，$-1-j$の異なる二つの複素解となるので（Ⅲ）の場合となる。

式6―74 より一般解は，$i_{L1}(t)=k_1e^{\alpha_1 t}+k_2e^{\alpha_2 t}\,[\mathrm{A}]$となる。

式6―75 より特解は，$i_{L2}(t)=1\,\mathrm{A}$ となる。

よって，未定係数を含む解は$i_L(t)=k_1e^{\alpha_1 t}+k_2e^{\alpha_2 t}+1\,[\mathrm{A}]$となり，

また，$v(t)=2\dfrac{di_L(t)}{dt}=2\alpha_1k_1e^{\alpha_1 t}+2\alpha_2k_2e^{\alpha_2 t}\,[\mathrm{V}]$となり，

初期条件$i_L(0)=0\,\mathrm{A}$，$v(0)=0\mathrm{V}$ より$k_1=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}=\dfrac{1-j}{2}$，$k_2=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}=\dfrac{1+j}{2}$となる。

したがって，インダクタ電流は$i_L(t)=1-e^{-t}(\sin t+\cos t)\,[\mathrm{A}]$となる。　　（答）