第７章　ワークシート解答

1. 式7－80および式7－81より，図１の$V(l)$，$I(l)$を$V(x)$，$I(x)$で表すと

$$V(l) = V(x)\cosh\gamma(l-x) - Z_0 I(x)\sinh\gamma(l-x),$$

$$I(l) = I(x)\cosh\gamma(l-x) - \frac{1}{Z_0}V(x)\sinh\gamma(l-x)$$ となり[*1],

７－２節のドリル問題７を参照にして$V(x)$，$I(x)$について表すと，

$$V(x) = V(l)\cosh\gamma(l-x) + Z_0 I(l)\sinh\gamma(l-x),$$

$$I(x) = I(l)\cosh\gamma(l-x) + \frac{1}{Z_0}V(l)\sinh\gamma(l-x)$$ となる。

$V(l) = Z_L I(l)$を代入すると，

$$V(x) = V(l)\cosh\gamma(l-x) + \frac{Z_0}{Z_L}V(l)\sinh\gamma(l-x),$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_L}V(l)\cosh\gamma(l-x) + \frac{1}{Z_0}V(l)\sinh\gamma(l-x)$$ となる。　　（答）

また，整合時（$Z_L = Z_0$）には，$V(x) = V(l)e^{\gamma(l-x)}$，$I(x) = \dfrac{1}{Z_L}V(l)e^{\gamma(l-x)}$となる。　　（答）

２．　(1)　図２(a)については，式7－80および式7－81より，

$$\begin{aligned}V(l) &= V(0)\cosh\gamma l - Z_0 I(0)\sinh\gamma l\\ &= V(0)\cosh\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right) - Z_0 I(0)\sinh\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)\\ &= V(0)\cos\frac{\pi}{2} - jZ_0 I(0)\sin\frac{\pi}{2} = -jZ_0 I(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(l) &= I(0)\cosh\gamma x - \frac{1}{Z_0}V(0)\sinh\gamma x\\ &= I(0)\cosh\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{1}{Z_0}V(0)\sinh\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)\\ &= I(0)\cos\frac{\pi}{2} - j\frac{1}{Z_0}V(0)\sin\frac{\pi}{2} = -j\frac{V(0)}{Z_0}\end{aligned}$$

となる。また，

$V(l) = Z_L I(l)$に代入すると$-jZ_0 I(0) = \dfrac{-jZ_L V(0)}{Z_0}$となるので入力インピーダンスは,

$Z_{\text{in}} = \dfrac{V(0)}{I(0)} = \dfrac{Z_0^2}{Z_L}$となり，$Z_0 = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$を代入すると$Z_{\text{in}} = \dfrac{L_0}{C_0 Z_L}$ となる。　　（答）

[*1] $\cosh(A \pm B) = \cosh A\cosh B \pm \sinh A\sin B$，$\sinh(A \pm B) = \sinh A\cosh B \pm \cosh A\sin B$の関係がある。

(2)　図２(b)についても同様に

$V(l) = -jZ_1 I(0)$，$I(l) = -j\dfrac{V(0)}{Z_1}$ となる。

さらに，$V(2l) = -jZ_0 I(l)$，$I(2l) = -j\dfrac{V(l)}{Z_0}$ となる。

$V(2l) = Z_L I(2l)$ に代入すると入力インピーダンスは，$Z_{\mathrm{in}} = \dfrac{V(0)}{I(0)} = \left(\dfrac{Z_1}{Z_0}\right)^2 Z_L$ となり，

$Z_0 = \sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$ および $Z_1 = \sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}$ を代入すると $Z_{\mathrm{in}} = \dfrac{C_0 L_1}{C_1 L_0} Z_L$ となる。　　（答）

３．　(1)　終端開放の長さ l_1 の伝送線路の入力インピーダンスは，式 7－103 より

$Z_{\mathrm{i}\infty} = -j\sqrt{\dfrac{L}{C}}\cot\beta l_1 = -j\sqrt{\dfrac{L}{C}}\cot\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_1\right)$ となる。

$l_1 = \dfrac{\lambda}{2}m$，$m = 0,\ 1,\ 2,\cdots$ のとき $Z_{\mathrm{i}\infty} = \infty$（反共振）となるので，最小の長さは，$l_1 = \dfrac{\lambda}{2} > 0$［m］となる。

このとき，$\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda\sqrt{LC}} = \dfrac{2\pi}{2l_1\sqrt{LC}} = \dfrac{\pi}{l_1\sqrt{LC}}$［rad/s］となる。　　（答）

(2)　終端短絡の長さ l_2 の伝送線路の入力インピーダンスは，式 7－105 より

$Z_{\mathrm{i}0} = j\sqrt{\dfrac{L}{C}}\tan\beta l_2 = j\sqrt{\dfrac{L}{C}}\tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_2\right)$ となる。

$l_2 = \dfrac{\lambda}{4}n$，$n = 1,\ 3,\ 5,\cdots$ のとき $Z_{\mathrm{i}0} = \infty$（反共振）となるので，最小の長さは，$l_2 = \dfrac{\lambda}{4}$［m］となる。

このとき，$\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda\sqrt{LC}} = \dfrac{2\pi}{4l_2\sqrt{LC}} = \dfrac{\pi}{2l_2\sqrt{LC}}$［rad/s］となる。　　（答）

(3)　伝送線路が並列に接続されているので，入力インピーダンスは，

$$Z_{\mathrm{i}} = \frac{Z_{\mathrm{i}0}Z_{\mathrm{i}\infty}}{Z_{\mathrm{i}0} + Z_{\mathrm{i}\infty}} = \frac{\dfrac{L}{C}\cot\beta l_x \tan\beta l_y}{-j\sqrt{\dfrac{L}{C}}\left(\cot\beta l_x - \tan\beta l_y\right)} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\cot\beta l_x \tan\beta l_y}{\left(\cot\beta l_x - \tan\beta l_y\right)}$$

$$= j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\cot\dfrac{2\pi}{\lambda}l_x \tan\dfrac{2\pi}{\lambda}l_y}{\left(\cot\dfrac{2\pi}{\lambda}l_x - \tan\dfrac{2\pi}{\lambda}l_y\right)}$$ となる。

$Z_{\mathrm{i}} = \infty$（反共振）となるためには，

$\cot\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_x\right) - \tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_y\right) = 0$（または，$\cot\left(\omega\sqrt{LC}\,l_x\right) - \tan\left(\omega\sqrt{LC}\,l_y\right) = 0$）となり，

条件は $\tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_x\right)\tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_y\right) = 1$（または，$\tan\left(\omega\sqrt{LC}\,l_x\right)\tan\left(\omega\sqrt{LC}\,l_y\right) = 1$）と表される。　　（答）

4．　式 7－80 および式 7－81 より，図 4 (b) の $V\left(\frac{l}{2}\right)$，$I\left(\frac{l}{2}\right)$ を $V(0)$，$I(0)$ で表すと

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = V(0)\cosh\gamma\frac{l}{2} - Z_0 I(0)\sinh\gamma\frac{1}{2},$$

$$I\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{Z_0}V(0)\sinh\gamma\frac{1}{2} + I(0)\cosh\gamma\frac{1}{2}$$ となり（$\gamma = j\omega\sqrt{LC}$），

式 7－75 および式 7－73 より，未知の長さの伝送線路の特性インピーダンスと伝搬定数は

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$，$j\omega\sqrt{2L \times 2C} = 2j\omega\sqrt{LC} = 2\gamma$ となるので，$V(x)$，$I(x)$ を $V\left(\frac{l}{2}\right)$，$I\left(\frac{l}{2}\right)$ で表すと

$V(x) = V\left(\frac{l}{2}\right)\cosh 2\gamma x - Z_0 I\left(\frac{l}{2}\right)\sinh 2\gamma x$，$I(x) = -\frac{1}{Z_0}V\left(\frac{l}{2}\right)\sinh 2\gamma x + I\left(\frac{l}{2}\right)\cosh 2\gamma x$ となる。

したがって，$V(x)$，$I(x)$ を $V(0)$，$I(0)$ で表すと

$$\begin{aligned} V(x) &= V(0)\cosh 2\gamma x\cosh\gamma\frac{l}{2} + V(0)\sinh 2\gamma x\sinh\gamma\frac{l}{2} \\ &\quad - I(0)Z_0\cosh 2\gamma x\sinh\gamma\frac{l}{2} - I(0)Z_0\sinh 2\gamma x\cosh\gamma\frac{l}{2} \\ &= V(0)\cosh\left(2x+\frac{l}{2}\right)\gamma - Z_0 I(0)\sinh\left(2x+\frac{l}{2}\right)\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= I(0)\sinh 2\gamma x\sinh\gamma\frac{l}{2} + I(0)\cosh 2\gamma x\cosh\gamma\frac{l}{2} \\ &\quad - V(0)\frac{1}{Z_0}\sinh 2\gamma x\cosh\gamma\frac{l}{2} - \frac{1}{Z_0}\cosh 2\gamma x\sinh\gamma\frac{l}{2} \\ &= -\frac{1}{Z_0}V(0)\sinh\left(2x+\frac{l}{2}\right)\gamma + I(0)Z_0\cosh\left(2x+\frac{l}{2}\right)\gamma \end{aligned}$$

となる[*1]。

式 7－80 および式 7－81 の関係より，$2x + \frac{l}{2} = l$ が条件となるので $x = \frac{l}{4}$ [m] となる。　　（答）