「電気数学」 2-1　ドリル問題　解答

問題１ ⑴　$y = Ce^{-3x}$

$y' = -3Ce^{-3x} = -3y$

したがって

$y' + 3y = 0$

⑵　$x^2 + y^2 = C$ の両辺を x で微分すると

$2x + 2yy' = 0$

これを整理して

$yy' + x = 0$

⑶　$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$

$y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x = -9y$

したがって

$y'' + 9y = 0$

⑷　$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$

$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = y$

したがって

$y'' - y = 0$

問題２ ⑴　$y' = \dfrac{dy}{dx} = \cos x$ であるから

$$y = \int \cos x dx = \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

⑵　$y' = \dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}$ であるから

$$y = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

⑶　$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x$ であるから

$$y' = \int 2x dx = x^2 + C_1$$

$$y = \int (x^2 + C_1) dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ は積分定数})$$

⑷　$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 4 \sin 2x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int 4 \sin 2x dx = -2 \cos 2x + C_1$$

$$y = \int (-2 \cos 2x + C_1) dx = -\sin 2x + C_1 x + C_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ は積分定数})$$

問題３ ⑴　$y' + 2xy = 0$

これを変形すると

$$y' = \frac{dy}{dx} = -2xy$$

と書くことができる。これを変数分離すると

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \quad (y \neq 0)$$

となる。両辺を積分すると

$$\log|y| = -x^2 + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

が得られる。両辺の指数をとり，y の絶対値をはずすと

$$y = Ce^{-x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2) $16yy' + 25x = 0$

これを変形すると

$$16y\frac{dy}{dx} = -25x$$

と書くことができる。これを変数分離すると

$$16ydy = -25xdx$$

となる。両辺を積分すると

$$8y^2 = -\frac{25}{2}x^2 + C_1$$

これを整理して

$$25x^2 + 16y^2 = C \quad (C = 2C_1 \text{ は任意定数})$$

(3) $y' + 6x^2y^2 = 0$

これを変形すると

$$y' = \frac{dy}{dx} = -6x^2y^2$$

となる。これを変数分離すると

$$-\frac{dy}{y^2} = 6x^2dx \quad (y \neq 0)$$

となる。両辺を積分すると

$$\frac{1}{y} = 2x^3 + C$$

よって，$y = \dfrac{1}{2x^3 + C}$ （C は任意定数）

(4) $y' - (1 + 2x)(1 + y^2) = 0$

これを変形すると

$$y' = \frac{dy}{dx} = (1 + 2x)(1 + y^2)$$

となる。これを変数分離すると

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + 2x)dx$$

となる。両辺を積分すると

$$\arctan y = x^2 + x + C$$

よって，$y = \tan(x^2 + x + C)$ （C は任意定数）

問題 4 (1) $yy' + x^2 - 3 = 0$

これを変形して変数分離すると

$$ydy = -(x^2 - 3)dx$$

となる。この両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x + C_1$$

よって，$y = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + 6x + C}$　（$C = 2C_1$ は任意定数）
$y(0) = \sqrt{3}$ であるから，$C = 3$。
つまり

$$y = \sqrt{-\frac{2}{3}x^3 + 6x + 3}$$

(2)　$yy' - 2xe^{y^2} = 0$
これを変形して変数分離すると

$$\frac{y}{e^{y^2}}dy = 2xdx$$

となる。両辺を積分すると

$$-\frac{1}{2}e^{-y^2} = x^2 + C_1$$

$$e^{-y^2} = -2x^2 + C \quad (C = -2C_1 \text{ は任意定数})$$

$$-y^2 = \log(-2x^2 + C) \qquad y^2 = \log\left(\frac{1}{-2x^2 + C}\right) \qquad y = \pm\sqrt{\log\left(\frac{1}{-2x^2 + C}\right)}$$

$y(0) = 1$ より，$\log\frac{1}{C} = -\log C = 1$　したがって，$C = \frac{1}{e}$
以上より

$$y = \sqrt{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{e} - 2x^2}\right)}$$

(3)　$3xy' - 2y = 0$
これを変形して変数分離すると

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{3x} \quad (y \neq 0)$$

となる。両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}\log|y| = \frac{1}{3}\log|x| + C_1$$

$$y^{\frac{1}{2}} = C_2 x^{\frac{1}{3}} \quad (C_2 = \pm e^{C_1} \text{ は任意定数で } 0 \text{ も含む})$$

$y(1) = 9$ より，$9^{\frac{1}{2}} = C_2$
以上より，$y = 9x^{\frac{2}{3}}$

(4)　$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$
これを変形して変数分離すると

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

となる。両辺を積分して

$$\log|I| = -\frac{R}{L}t + C_1$$

が得られる。両辺の指数をとり，整理すると

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (C = \pm e^{C_1} \text{ は任意定数で } 0 \text{ も含む})$$

$I(0) = I_0$ より，$C = I_0$

以上より

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

2-1　演習問題　解答

1.（1）　$y = \cos 2x$

$$y' = -2\sin 2x$$

（2）　$y = x^3 + 2$

$$y' = 3x^2$$

（3）　$y = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x = e^x + y$$

したがって，$y' - y = e^x$

（4）　$y = \tan x$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 = y^2 + 1$$

したがって

$$y' - y^2 = 1$$

2.（1）　与式を変形して変数分離すると

$$\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$$

となる。両辺を積分して

$$\log|1+y| = -\log|1+x| + C_1$$

$$1 + y = \frac{C}{1+x} \quad （C = \pm e^{C_1} \text{ または } 0，\text{すなわち任意定数}）$$

$$y = \frac{C}{1+x} - 1$$

（2）　与式を変形して変数分離すると

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{x}$$

となる。両辺を積分して

$$\log|y + \sqrt{1+y^2}| = \log|x| + C_1$$

$$y + \sqrt{1+y^2} = Cx \quad （C = \pm e^{C_1} \text{ で任意定数}）$$

$$y - Cx = -\sqrt{1+y^2}$$

この両辺を 2 乗して

$$y^2 - 2Cxy + C^2x^2 = 1 + y^2$$

$$2Cxy = C^2x^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{2}\left(Cx - \frac{1}{Cx}\right)$$

（3）　$y' = e^{x+y} = e^x e^y$

を変数分離すると

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C_1$$

よって，$e^x + e^{-y} = C$　（$C = -C_1$ は任意定数）

(4) 与式を整理して変数分離すると

$$dy\frac{\sin y}{\cos y} = dx\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$-\frac{(\cos y)'}{\cos y}dy = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

この両辺を積分して

$$-\log|\cos y| = -\log|\cos x| + C_1$$

が得られる。これを整理して

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{C_2}{\cos x}$$

$$\cos y = C\cos x \quad \left(C = \frac{1}{C_2}\text{ は任意定数}\right)$$

3. (1) $x + y(x) = u(x)$ の両辺を x で微分すると

$$1 + y' = u'$$

よって，$y' = u' - 1$

これを与式に代入すると

$$u^2(u' - 1) = 1$$

となる。変数分離すると

$$\frac{u^2}{1+u^2}du = \frac{1+u^2-1}{1+u^2}du = \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du = dx$$

となる。両辺を積分して

$$u - \arctan u = x + C$$

が得られる。$u = x + y$ に戻すと

$$x + y - \arctan(x+y) = x + C$$

$$\arctan(x+y) = y - C \quad (C\text{ は任意定数})$$

(2) $y(x) - x = u(x)$

の両辺を x で微分すると

$$y' - 1 = u'$$

よって，$y' = u' + 1$

これを与式に代入すると

$$u' + 1 = \frac{u}{u-1}$$

$$u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{u-u+1}{u-1} = \frac{1}{u-1}$$

変数を分離すると

$$(u-1)du = dx$$

となる。両辺を積分して

$$\frac{1}{2}u^2 - u = x + C_1$$

$$u^2 - 2u = 2x + C \quad (C = 2C_1\text{ は任意定数})$$

$u = y - x$ を戻して

$$(y-x)^2 - 2(y-x) = 2x + C$$

整理して，$(y-x)^2 - 2y = C$

(3) $2x + y(x) = u(x)$ の両辺を x で微分すると

$2 + y' = u'$

よって，$y' = u' - 2$

これを与式に代入すると

$u' - 2 = \tan u - 2$

$u' = \tan u$

変数分離すると

$$\frac{du}{\tan u} = \frac{\cos u}{\sin u}du = \frac{(\sin u)'}{\sin u}du = dx$$

となる。両辺を積分して

$\log|\sin u| = x + C_1$

$\sin u = Ce^x$　（$C = \pm e^{C_1}$ は任意定数）

$u = \arcsin Ce^x$

$y = \arcsin Ce^x - 2x$

(4)　$3x + e^y = u$ の両辺を x で微分すると

$$3 + e^y y' = u' \quad \text{よって}\ y' = \frac{u' - 3}{e^y} = (u' - 3)e^{-y}$$

これを与式に代入すると

$(u' - 3)e^{-y} = (u - 3)e^{-y}$

$u' = u$

となる。変数分離して

$$\frac{du}{u} = dx$$

となり，これを積分して

$\log|u| = x + C_1$

$u = Ce^x$　（$C = \pm e^{C_1}$ は任意定数）

$u = 3x + e^y$ に戻して

$e^y = Ce^x - 3x$

$y = \log(Ce^x - 3x)$

4.(1)　与式を変形して，変数分離すると

$$ydy = \frac{1}{1 + x^2}dx$$

となる。この両辺を積分して

$$\frac{1}{2}y^2 = \arctan x + C_1$$

$y = \pm\sqrt{2\arctan x + C}$　（$C = 2C_1$ は任意定数）

が得られる。$y(0) = -5$ より，$C = 25$

$y = -\sqrt{2\arctan x + 25}$

(2)　与式を変形して，変数分離すると

$y^{-3}dy = 2e^x dx$

となる。両辺を積分すると

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = 2e^x + C_1$$

$$y^2 = \frac{1}{c - 4e^x} \quad (C = -2C_1\ \text{は任意定数})$$

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{C - 4e^x}}$$

が得られる。$y(0) = \dfrac{1}{3}$ より $C = 13$。よって

$$y = \frac{1}{\sqrt{13 - 4e^x}}$$

(3) $y(x) - x = u(x)$ とおいて両辺を x で微分すると

$$y' - 1 = u'$$

よって，$y' = u' + 1$

これらを与式に代入すると

$$u' + 1 = \frac{u+1}{u+5}$$

$$u' = \frac{u+1}{u+5} - 1 = \frac{u+1}{u+5} - \frac{u+5}{u+5} = \frac{-4}{u+5}$$

となる。変数分離して

$$(u+5)du = -4dx$$

が得られる。両辺を積分して

$$\frac{1}{2}u^2 + 5u = -4x + C_1$$

$$u^2 + 10u = -8x + C \quad (C = 2C_1 \text{ は任意定数})$$

$u = y - x$ を戻して

$$(y-x)^2 + 10(y-x) = -8x + C$$

$$(y-x)^2 + 10y - 2x = C$$

が得られる。$y(0) = 2$ より，$C = 2^2 + 20 = 24$。よって

$$(y-x)^2 + 10y - 2x = 24$$

(4) $y(x) - x = u(x)$ とおいて，両辺を x で微分すると

$$y' - 1 = u'$$

よって，$y' = u' + 1$

これらを与式に代入して

$$u' + 1 = \sin u$$

変数分離して

$$\frac{du}{\sin u - 1} = dx$$

$\tan \dfrac{u}{2} = t$ とおくと，

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{du}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であるから，上記を積分すると

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sin u - 1} &= \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} - 1}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{2}{2t - 1 - t^2}dt \\ &= \int \frac{2}{-(t^2 - 2t + 1)}dt\end{aligned}$$

$$= -\int \frac{2}{(t-1)^2}dt$$
$$= \frac{2}{t-1} = \frac{2}{\tan\dfrac{u}{2}-1} = x + C$$

$$\tan\frac{u}{2} = 1 + \frac{2}{x+C}$$
$$u = 2\arctan\left(1 + \frac{2}{x+C}\right)$$
$$y = x + 2\arctan\left(1 + \frac{2}{x+C}\right)$$

$y(0) = 2\arctan 3$ より $C = 1$。よって

$$y = x + 2\arctan\left(1 + \frac{2}{x+1}\right)$$

2-2 ドリル問題　解答

問題 1　(1)　$y_{\mathrm{h}} = Ce^{-x}$，${y_{\mathrm{h}}}' = -Ce^{-x} = -y_{\mathrm{h}}$ よって ${y_{\mathrm{h}}}' + y_{\mathrm{h}} = 0$

$$y_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \qquad {y_{\mathrm{p}}}' = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

よって

$$ {y_{\mathrm{p}}}' + y_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) = \sin x$$

(2)　$y_{\mathrm{h}} = \dfrac{C}{x}$，${y_{\mathrm{h}}}' = -\dfrac{C}{x^2} = -\dfrac{1}{x}y_{\mathrm{h}}$ よって $x{y_{\mathrm{h}}}' + y_{\mathrm{h}} = 0$

$$y_{\mathrm{p}} = \frac{x}{2} \qquad {y_{\mathrm{p}}}' = \frac{1}{2}$$

よって，$x{y_{\mathrm{p}}}' + y_{\mathrm{p}} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} = x$

問題 2　(1)　$f(x) = a$，$r(x) = b$ より $\displaystyle\int f(x)dx = a\int dx = ax$，したがって

$$y = e^{-ax}\left(\int be^{ax}dx + C\right)$$
$$= e^{-ax}\left(\frac{b}{a}e^{ax} + C\right) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2)　$f(x) = 1$，$r(x) = x$ より $\displaystyle\int f(x)dx = \int dx = x$，したがって

$$y = e^{-x}\left(\int xe^x dx + C\right)$$

である。ここで

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

であるから

$$y = e^{-x}(xe^x - e^x + C) = Ce^{-x} + x - 1 \quad (C \text{ は任意定数})$$

(3) $f(x)=1$，$r(x)=x^2$ より，$\displaystyle\int f(x)dx=\int dx=x$，したがって

$$y=e^{-x}\left(\int x^2e^x dx+C\right)$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\int x^2e^xdx&=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int xe^xdx\\&=x^2e^x-2(xe^x-e^x)\\&=e^x(x^2-2x+2)\end{aligned}$$

であるから

$$y=e^{-x}\{e^x(x^2-2x+2)+C\}=Ce^{-x}+x^2-2x+2\quad(C\text{ は任意定数})$$

(4) $f(x)=a$，$r(x)=e^{bx}$ より $\displaystyle\int f(x)dx=a\int dx=ax$，したがって

$$\begin{aligned}y&=e^{-ax}\left(\int e^{bx}e^{ax}dx+C\right)\\&=e^{-ax}\left(\int e^{(a+b)x}dx+C\right)\\&=e^{-ax}\left(\frac{e^{(a+b)x}}{a+b}+C\right)=Ce^{-ax}+\frac{1}{a+b}e^{bx}\quad(C\text{ は任意定数})\end{aligned}$$

(5) $f(x)=1$，$r(x)=\cos x$ より $\displaystyle\int f(x)dx\int dx=x$，したがって

$$y=e^{-x}\left(\int\cos x\cdot e^xdx+C\right)$$

である。ここで

$$\int e^x\cos xdx=\int(e^x)'\cos xdx=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx$$
$$\int e^x\sin xdx=\int(e^x)'\sin xdx=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx$$

であるから

$$\int e^x\cos xdx=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)$$

以上より

$$y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\quad(C\text{ は任意定数})$$

(6) $f(t)=-1$，$r(t)=\sin t$ より $\displaystyle\int f(t)dt=-\int dt=-t$，したがって

$$y(t)=e^t\left(\int\sin t\cdot e^{-t}dt+C\right)$$

である。ここで

$$\int e^{-t}\sin tdt=\int(-e^{-t})'\sin tdt=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos tdt$$

$$\int e^{-t}\cos tdt = \int (-e^{-t})'\cos tdt = -e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\sin dt$$

であるから

$$\int e^{-t}\sin tdt = -\frac{e^{-t}}{2}(\cos t + \sin t)$$

以上より

$$y(t) = Ce^{t} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

問題 3 ⑴ $f(x) = 1$，$r(x) = e^{-x}$ より $\displaystyle\int f(x)dx = \int dx = x$

したがって

$$y = e^{-x}\left(\int e^{-x}e^{x}dx + C\right) = e^{-x}(x + C)$$
$$= Ce^{-x} + xe^{-x} \quad (C\text{ は任意定数})$$

$y(1) = 0$ であるから $y(1) = \dfrac{C}{e} + \dfrac{1}{e} = 0$ である。したがって，$C = -1$

すなわち

$$y = (x-1)e^{-x}$$

⑵ $f(x) = -3$，$r(x) = \sin x$ より $\displaystyle\int f(x)dx = -3\int dx = -3x$

したがって

$$y = e^{3x}\left(\int e^{-3x}\sin xdx + C\right)$$

ここで

$$\int e^{-3x}\sin xdx = \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\sin xdx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\cos xdx$$
$$\int e^{-3x}\cos xdx = \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)'\cos xdx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cos x - \frac{1}{3}\int e^{-3x}\sin xdx$$

であるから

$$\int e^{-3x}\sin xdx = -\frac{3}{10}e^{-3x}\left(\sin x + \frac{1}{3}\cos x\right)$$

以上より

$$y = -\frac{3}{10}\left(\sin x + \frac{1}{3}\cos x\right) + Ce^{3x}$$

$y(0) = 0$ であるから $y(0) = -\dfrac{3}{10}\dfrac{1}{3} + C = 0$，$C = \dfrac{1}{10}$

すなわち

$$y = -\frac{3}{10}\left(\sin x + \frac{1}{3}\cos x\right) + \frac{1}{10}e^{3x} = \frac{1}{10}(e^{3x} - 3\sin x - \cos x)$$

(3)　$f(x) = -\dfrac{2}{x}$，$r(x) = x^3$ より $\displaystyle\int f(x)dx = -2\int x^{-1}dx = -2\log|x| = \log\frac{1}{x^2}$

したがって

$$y = e^{-\log\frac{1}{x^2}}\left(\int e^{\log\frac{1}{x^2}}x^3dx + C\right) = x^2\left(\int xdx + C\right)$$
$$= x^2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2$$

$y(1) = 1$ であるから $y(1) = \dfrac{1}{2} + C = 1$，$C = \dfrac{1}{2}$

すなわち

$$y = \frac{x^2}{2}(x^2 - 1)$$

(4)　$f(x) = 2x$，$r(x) = 2x$ より $\displaystyle\int f(x)dx = 2\int xdx = x^2$

したがって

$$y = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}dx + C\right) = e^{-x^2}(e^{x^2} + C)$$
$$= 1 + Ce^{-x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

$y(0) = 3$ であるから $y(0) = 1 + C = 3$，$C = 2$

以上より

$$y = 1 + 2e^{-x^2}$$

2-2 演習問題　解答

1.（1）　$xy' + y = x$ の両辺を x で割ると

$$y' + \frac{1}{x}y = 1$$

となるので $f(x) = \dfrac{1}{x}$，$r(x) = 1$。$\displaystyle\int f(x)dx = \log|x|$

したがって

$$y = e^{-\log|x|}\left(\int e^{\log|x|}dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{|x|}\left(\int |x|dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\int xdx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2)　$xy' + 2y = x^{-1}e^x$ の両辺を x で割ると

$$y' + \frac{2}{x}y = x^{-2}e^x$$

となるので $f(x) = \dfrac{2}{x}$，$r(x) = x^{-2}e^x$。$\displaystyle\int f(x)dx = 2\log|x| = \log x^2$

したがって

$$y = e^{-\log x^2}\left(\int x^{-2}e^x e^{\log x^2}dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\int e^x dx + C\right) \quad (C \text{ は任意定数})$$
$$= \frac{1}{x^2}(e^x + C)$$

(3)　$xy' + y = \sin x$ の両辺を x で割ると

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

となるので $f(x) = \dfrac{1}{x}$，$r(x) = \dfrac{\sin x}{x}$。$\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x|$

したがって

$$y = e^{-\log|x|}\left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\log|x|}dx + C\right) \quad (C \text{ は任意定数})$$
$$= \frac{1}{|x|}\left(\int \frac{|x|\sin x}{x}dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}(-\cos x + C)$$

(4)　与式の両辺を x^2 で割ると

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cosh 2x}{x^2}$$

となるので，$f(x) = \dfrac{2}{x}$，$r(x) = \dfrac{\cosh 2x}{x^2}$。$\displaystyle\int f(x)dx = 2\log|x| = \log x^2$

したがって

$$y = e^{-\log x^2}\left(\int \frac{\cosh 2x}{x^2}e^{\log x^2}dx + C_1\right) \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\int \cosh 2x dx + C_1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2x + C_1\right)$$
$$= \frac{\sinh 2x + C}{2x^2} \quad (C = 2C_1 \text{ は任意定数})$$

(5)　与式の両辺を $\sqrt{1+x^2}$ で割ると

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

となるので $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。$\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
$= \log|x + \sqrt{x^2+1}|$

したがって

$$y=e^{-\log|x+\sqrt{x^2+1}|}\left(\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\log|x+\sqrt{x^2+1}|}dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\int\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx+C\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(\sqrt{1+x^2}+x+C)$$
$$=1+\frac{C}{x+\sqrt{x^2+1}}=1+C(\sqrt{x^2+1}-x)\quad(C\text{ は任意定数})$$

⑹　与式の両辺を $x\log x$ で割ると

$$y'+\frac{1}{x\log x}y=\frac{2x}{\log x}$$

となるので $f(x)=\dfrac{1}{x\log x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\log x}=\dfrac{(\log x)'}{\log x}$，$r(x)=\dfrac{2x}{\log x}$。

$$\int f(x)dx=\int\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\log|\log x|$$

したがって

$$y=e^{-\log|\log x|}\left(\int\frac{2x}{\log x}e^{\log|\log x|}dx+C\right)$$
$$=\frac{1}{\log x}\left(\int 2xdx+C\right)$$
$$=\frac{x^2+C}{\log x}\quad(C\text{ は任意定数})$$

2.⑴　両辺を x で微分すると

$$y'=e^x-2y$$

よって，$y'+2y=e^x$

$f(x)=2$，$r(x)=e^x$ より $\displaystyle\int f(x)dx=2\int dx=2x$

したがって

$$y=e^{-2x}\left(\int e^xe^{2x}dx+C\right)$$
$$=e^{-2x}\left(\frac{1}{3}e^{3x}+C\right)$$
$$=\frac{1}{3}e^x+\frac{C}{e^{2x}}$$

⑵　両辺を t で微分して，R で割ると

$$I'+\frac{1}{RC}I=\frac{\omega E_0}{R}\cos\omega t$$

したがって

$$f(t)=\frac{1}{RC},\ r(t)=\frac{\omega E_0}{R}\cos\omega t$$
$$\int f(t)dt=\frac{1}{RC}\int dt=\frac{t}{RC}$$

よって

$$I(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{\omega E_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega tdt+C_1\right)\quad(C_1\text{ は任意定数})$$

ここで

$$\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t dt = \int (RCe^{\frac{t}{RC}})'\cos\omega t dt = RCe^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t + \omega RC\int e^{\frac{t}{RC}}\sin\omega td$$
$$\int e^{\frac{t}{RC}}\sin\omega t dt = \int (RCe^{\frac{t}{RC}})'\sin\omega t dt = RCe^{\frac{t}{RC}}\sin\omega t - \omega RC\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega td$$

であるから

$$\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t dt = \frac{RCe^{\frac{t}{RC}}}{1+\omega^2R^2C^2}(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t)$$

以上より

$$I(t) = \frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t) + C_1e^{-\frac{t}{RC}}$$

3. (1)　与式の両辺を R で割ると

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E(t)}{R} = \frac{E_0}{R}\cos\omega t$$

となるので $f(t) = \dfrac{1}{RC}$，$r(t) = \dfrac{E_0}{R}\cos\omega t$，$\displaystyle\int f(t)dt = \frac{t}{RC}$

したがって

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{-\frac{t}{RC}}\left(\frac{E_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t dt + C_1\right) \\ &= \frac{C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t) + C_1e^{-\frac{t}{RC}} \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

が得られる。

$$Q(0) = \frac{C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0 + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\frac{C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0$$

であるから

$$Q(t) = \frac{C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0(\cos\omega t + \omega RC\sin\omega t - e^{-\frac{t}{RC}})$$

(2)　(1)で得られた結果を t で微分すると

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) = \frac{\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}E_0\left(\omega RC\cos\omega t - \sin\omega t + \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{\omega RC}\right)$$

2-3　ドリル問題　解答

問題 1　(1)　$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$

$$y' = 3c_1e^{3x} - 3c_2e^{-3x}$$
$$y'' = 9c_1e^{3x} + 9c_2e^{-3x} = 9(c_1y_1 + c_2y_2)$$

よって

$$y'' - 9y = 9(c_1y_1 + c_2y_2) - 9(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

であり $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ は与式の一般解である。

(2)　$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$

$$y' = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}$$
$$y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x}$$

$$
\begin{aligned}
y''+5y'+6y &= 4c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}+5(-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x})+6(c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}) \\
&= (4-10+6)c_1e^{-2x}+(9-15+6)c_2e^{-2x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$ は与式の一般解である。

(3)　$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$

$$
\begin{aligned}
y' &= 3c_1e^{3x}+c_2e^{3x}+3c_2xe^{3x} \\
y'' &= 9c_1e^{3x}+3c_2e^{3x}+3c_2e^{3x}+9c_2xe^{3x} \\
&= 9c_1e^{3x}+6c_2e^{3x}+9c_2xe^{3x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y''-6y'+9y &= 9c_1e^{3x}+6c_2e^{3x}+9c_2xe^{3x}-6(3c_1e^{3x}+c_2e^{3x}+3c_2xe^{3x}) \\
&\quad +9(c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}) \\
&= (9-18+9)c_1e^{3x}+(6-6)c_2e^{3x}+(9-18+9)c_2xe^{3x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$ は与式の一般解である。

(4)　$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$

$$
\begin{aligned}
y' &= -3c_1\sin 3x+3c_2\cos 3x \\
y'' &= -9c_1\cos 3x-9c_2\sin 3x=-9(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)=-9y
\end{aligned}
$$

したがって

$$y''+9y=0$$

であるから，$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$ は与式の一般解である。

(5)　$y=c_1e^{-3x}\cos 2x+c_2e^{-3x}\sin 2x$

$$
\begin{aligned}
y' &= -3c_1e^{-3x}\cos 2x-2c_1e^{-3x}\sin 2x-3c_2e^{-3x}\sin 2x+2c_2e^{-3x}\cos 2x \\
y'' &= 9c_1e^{-3x}\cos 2x+6c_1e^{-3x}\sin 2x+6c_1e^{-3x}\sin 2x-4c_1e^{-3x}\cos 2x \\
&\quad +9c_2e^{-3x}\sin 2x-6c_2e^{-3x}\cos 2x-6c_2e^{-3x}\cos 2x-4c_2e^{-3x}\sin 2x \\
&= 5c_1e^{-3x}\cos 2x+12c_1e^{-3x}\sin 2x+5c_2e^{-3x}\sin 2x-12c_2e^{-3x}\cos 2x
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&y''+6y'+13y \\
&= (5-18+13)c_1e^{-3x}\cos 2x+(12-12)c_1e^{-3x}\sin 2x+(5-18+13)c_2e^{-3x}\sin 2x \\
&\quad -(12+12)c_2e^{-3x}\cos 2x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

であるから，$y=c_1e^{-3x}\cos 2x+c_2e^{-3x}\sin 2x$ は与式の一般解である。

問題 2　(1)　特性方程式は $\lambda^2-25=0$。よって $\lambda=\pm 5$ を解に持つ。したがって，一般解は

$$y(x)=c_1e^{-5x}+c_2e^{5x}$$

である。

(2)　特性方程式 $\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)=0$ は異なる二つの実数解 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$ をもつから，一般解は

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{x}$$

(3)　特性方程式は，$\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$ であり重解 $\lambda=3$ を持つから，一般解は

$$y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}=(c_1+c_2x)e^{3x}$$

⑷　特性方程式は，$\lambda^2+16=0$ であり共役複素解 $\lambda=\pm j4$ を持つから，一般解は

$y(x)=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$

⑸　特性方程式は，$\lambda^2+4\lambda+5=0$ であり共役複素解 $\lambda=-2\pm j$ を持つから，一般解は

$y(x)=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

問題 3　⑴　特性方程式は，$\lambda^2-9=0$ であり異なる実数解 $\lambda=\pm 3$ を持つから，一般解は

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$

である。微分すると

$y'=3c_1e^{3x}-3c_2e^{-3x}$

初期値は

$y(0)=c_1+c_2=4$

$y'(0)=3c_1-3c_2=0$

よって，$c_1=c_2=2$

したがって

$y=2(e^{3x}+e^{-3x})$

⑵　特性方程式は，$\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$ であり，異なる実数解 $\lambda=-1,-3$ を持つから，一般解は

$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$

である。これを微分すると

$y'=-c_1e^{-x}-3c_2e^{-3x}$

初期値は

$y(0)=c_1+c_2=5$

$y'(0)=-c_1-3c_2=-9 \qquad c_1=3, c_2=2$

したがって

$y=3e^{-x}+2e^{-3x}$

⑶　特性方程式は，$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$ であり，重解 $\lambda=-1$ を持つから一般解は，

$y=(c_1+c_2x)e^{-x}$

である。これを微分して

$y'=-c_1e^{-x}+c_2e^{-x}-c_2xe^{-x}$

初期値より

$y(0)=c_1=3$

$y'(0)=-c_1+c_2=-4$

よって，$c_1=3, c_2=-1$

したがって

$y=(3-x)e^{-x}$

⑷　特性方程式は，$\lambda^2+25=0$ であり共役複素解 $\lambda=\pm j5$ を持つから，一般解は

$y=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x$

である。これを微分して

$y'=-5c_1\sin 5x+5c_2\cos 5x$

初期値より

$$y\left(\frac{\pi}{10}\right)=c_2=2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{10}\right)=-5c_1=10 \qquad c_1=-2, c_2=2$$

したがって

$$y=-2(\cos 5x-\sin 5x)$$

⑸　特性方程式は，$\lambda^2-6\lambda+13=0$ であり，共役複素解 $\lambda=3\pm j2$ を持つから，一般解は

$$y=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

である。これを微分すると

$$y=3e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+2e^{3x}(-c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$$

初期値より

$$y(0)=c_1=3 \qquad y'(0)=3c_1+2c_2=-1$$

よって，$c_1=3, c_2=-5$

したがって

$$y=e^{3x}(3\cos 2x-5\sin 2x)$$

2-3　演習問題　解答

1.⑴　特性方程式は重解 $\lambda=-\alpha$ を持つから $\lambda^2+2\alpha\lambda+\alpha^2=0$ である。

したがって

$$y''+2\alpha y'+\alpha^2y=0$$

【別解】

一般解は $y=(c_1+c_2x)e^{-\alpha x}$ であるから，これを微分して

$$y'=-\alpha c_1e^{-\alpha x}-\alpha c_2xe^{-\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}=-\alpha y+c_2e^{-\alpha x} \qquad ①$$

$$\begin{aligned}y''&=\alpha^2c_1e^{-\alpha x}+\alpha^2c_2xe^{-\alpha x}-\alpha c_2e^{-\alpha x}-\alpha c_2e^{-\alpha x} \qquad ②\\&=\alpha^2y-2\alpha c_2e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

②より，$y''+2\alpha c_2e^{-\alpha x}-\alpha^2y=0$

①より，$y'+\alpha y=c_2e^{-\alpha x}$

よって，$2\alpha c_2e^{-\alpha x}=2\alpha y'+2\alpha^2y$

これを上式に代入して

$$y''+2\alpha y'+\alpha^2y=0$$

⑵　特性方程式は，共役複素解 $\lambda=-1\pm j\sqrt{5}$ を持つから $\lambda^2+2\lambda+6=0$ である。したがって

$$y''+2y'+6y=0$$

【別解】

一般解は $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x)$ であるから，これを微分して

$$\begin{aligned}y'&=-e^{-x}(c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x)+\sqrt{5}e^{-x}(-c_1\sin\sqrt{5}x+c_2\cos\sqrt{5}x)\\&=-y+\sqrt{5}e^{-x}(-c_1\sin\sqrt{5}x+c_2\cos\sqrt{5}x)\\y''&=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x)-\sqrt{5}e^{-x}(-c_1\sin\sqrt{5}x+c_2\cos\sqrt{5}x)\\&\qquad-\sqrt{5}e^{-x}(-c_1\sin\sqrt{5}x+c_2\cos\sqrt{5}x)-5e^{-x}(c_1\cos\sqrt{5}x+c_2\sin\sqrt{5}x)\\&=-4y-2(y'+y)\end{aligned}$$

よって

$$y''+2y'+6y=0$$

⑶　特性方程式は，異なる実解 $\lambda=\pm\beta$ を持つから

$\lambda^2-\beta^2=0$ である。したがって

$$y''-\beta^2y=0$$

【別解】

一般解は $y = c_1 \cosh \beta x + c_2 \sinh \beta x$ である。この両辺を微分して

$$\begin{aligned} y' &= \beta c_1 \sinh \beta x + \beta c_2 \cosh \beta x \\ y'' &= \beta^2 (c_1 \cosh x + c_2 \sin \beta x) \\ &= \beta^2 y \end{aligned}$$

したがって，$y'' - \beta^2 y = 0$

(4) 特性方程式は，共役複素解 $\lambda = \pm j\omega$ を持つから $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ である。したがって

$y'' + \omega^2 y = 0$

【別解】

一般解は，$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ である。この両辺を微分して

$y' = \omega(-c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x)$

$y'' = -\omega^2 (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) = -\omega^2 y$

したがって

$y'' + \omega^2 y = 0$

2. (1) 与式は $y'' - \dfrac{1}{9}y = 0$ となる。よって特性方程式は

$$\lambda^2 - \frac{1}{9} = 0 \qquad \lambda = \pm \frac{1}{3}$$

したがって一般解は

$$y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} \qquad y' = \frac{1}{3}(c_1 e^{\frac{1}{3}x} - c_2 e^{-\frac{1}{3}x})$$

である。初期値より

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad y'(0) = \frac{1}{3}(c_1 - c_2) = 0$$

よって，$c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$

すなわち

$$y = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{3}x} + e^{-\frac{1}{3}x})$$

(2) 与式は $y'' + \dfrac{1}{6}y' - \dfrac{1}{6}y = 0$ となる。よって特性方程式は $\lambda^2 + \dfrac{1}{6}\lambda - \dfrac{1}{6} = \left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{1}{3}\right) = 0$ となり，異なる実解 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$，$\lambda = \dfrac{1}{3}$ を持つ。したがって一般解は

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{3}x} \qquad y' = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}c_2 e^{\frac{1}{3}x}$$

である。初期値より

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = -2 \\ y'(0) &= -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = -4 \end{aligned}$$

よって，$c_1 = 4$，$c_2 = -6$

以上より

$$y = 4e^{-\frac{1}{2}x} - 6e^{\frac{1}{3}x}$$

⑶　与式は $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ となる。よって特性方程式は $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2=0$ となり，重解 $\lambda=\frac{1}{2}$ を持つ。したがって一般解は，

$$y=(c_1+c_2x)e^{\frac{1}{2}x}$$
$$y'=\frac{1}{2}c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}c_2xe^{\frac{1}{2}x}$$

である。初期値より

$$y(0)=c_1=1$$
$$y'(0)=\frac{1}{2}c_1+c_2=\frac{1}{2}+c_2=0$$

よって，$c_2=-\frac{1}{2}$

以上より

$$y=(1-\frac{1}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}$$

⑷　与式は $y''+\frac{1}{16}y=0$ となる。よって特性方程式は $\lambda^2+\frac{1}{16}=0$ となり共役複素解 $\lambda=\pm j\frac{1}{4}$ を持つ。したがって一般解は

$$y=c_1\cos\frac{1}{4}x+c_2\sin\frac{1}{4}x$$
$$y'=-\frac{1}{4}c_1\sin\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}c_2\cos\frac{1}{4}x$$

である。初期値より

$$y(\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}(c_1+c_2)=\sqrt{2}\qquad y'(0)=\frac{1}{4}c_2=1$$

よって $c_1=-2$，$c_2=4$ であるから

$$y=-2\cos\frac{1}{4}x+4\sin\frac{1}{4}x$$

⑸　特性方程式は，$5\lambda^2-2\lambda+1=0$ であり共役複素解 $\lambda=\frac{1}{5}\pm j\frac{2}{5}$ を持つ。したがって一般解は

$$y=e^{\frac{1}{5}x}\left(c_1\cos\frac{2}{5}x+c_2\sin\frac{2}{5}x\right)$$
$$y'=\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}x}\left(c_1\cos\frac{2}{5}x+c_2\sin\frac{2}{5}x\right)+\frac{2}{5}e^{\frac{1}{5}x}\left(-c_1\sin\frac{2}{5}x+c_2\cos\frac{2}{5}x\right)$$

である。初期値より

$$y(0)=c_1=-5$$
$$y'(0)=\frac{1}{5}c_1+\frac{2}{5}c_2=1\qquad c_1=-5,c_2=5$$

以上より

$$y=5e^{\frac{1}{5}x}\left(\sin\frac{2}{5}x-\cos\frac{2}{5}x\right)$$

3. キルヒホッフの法則より

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}I(\tau)d\tau=E(t)=E=100 \qquad ①$$

両辺を t について微分すると

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=\frac{dE(t)}{dt}=\frac{dE}{dt}=0$$

となる。特性方程式は

$$\lambda^2+\frac{1}{LC}=0$$

よって，共役複素解 $\lambda=\pm j\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ を持つから，一般解は

$$I(t)=c_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+c_2\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

①において $t=0$ で，$Q(0)=\displaystyle\int_{t_0}^{t}I(\tau)d\tau=0$ であるから

$$L\frac{dI(0)}{dt}=100 \qquad ②$$

である。$I(t)$ を微分すると

$$\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{c_1}{\sqrt{LC}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{c_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t$$

である。$L=0.2\mathrm{H}$，$C=0.05\mathrm{F}$，$I(0)=0\mathrm{A}$，$LI'(0)=100$ より

$$I(0)=c_1=0, \quad I'(0)=10c_2=\frac{10}{2}\times100=500$$

よって，$c_2=50$

以上より

$$I(t)=50\sin10t[\mathrm{A}]$$

4. キルヒホッフの法則より

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}I(\tau)d\tau=E(t)=E=100 \qquad ①$$

両辺を t で微分すると

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE}{dt}=0$$

が得られる。特性方程式は

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

よって，$\lambda=\dfrac{-R}{2L}\pm\dfrac{1}{2L}\sqrt{R^2-4\dfrac{L}{C}}$

$R=80\Omega$，$L=20\mathrm{H}$，$C=0.01=\dfrac{1}{100}\mathrm{F}$ であるから

$$\lambda=-2\pm j10$$

よって一般解は

$$I(t)=e^{-2t}(c_1\cos t+c_2\sin t)$$

初期電流 $I(0)=0\mathrm{A}$，初期電荷 $Q(0)=0\mathrm{C}$ を①に代入して

$$LI'(0) = 100$$

よって，$I'(0) = \dfrac{100}{20} = 5\text{A/s}$ である。初期値により c_1，c_2 を求めると

$$I(0) = c_1 = 0$$
$$I'(t) = -2e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{-2t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

より

$$I'(0) = -2c_1 + c_2 = 5 \qquad c_2 = 5$$

以上より

$$I(t) = 5e^{-2t} \sin t \ \ [\text{A}]$$

5.（1） θ が十分小さく，$\sin\theta \simeq \theta$ とおけるので，与式は

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0$$

よって，$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$ と書ける。この特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

よって，共役複素解 $\lambda = \pm j\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ を持つ。したがって，$\theta(t)$ の一般解は

$$\theta(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

である。また，この両辺を t で微分すると

$$\theta'(t) = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(-c_1 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

である。題意より初期値は

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \theta'(0) = 0$$

であり，

$$\theta(0) = c_1 = \theta_0 \qquad \theta'(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}c_2 = 0$$

よって，$c_2 = 0$

以上より

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

（2） 振り子の周期を T とすると

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi$$

よって，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ [s]

これは，周期 T は振り子の振幅によらず一定であることを示している。

2-4 ドリル問題　解答

問題 1

(1) $y_\mathrm{p} = -e^x$

$y_\mathrm{p}{}' = -e^x$

$y_\mathrm{p}{}'' = -e^x$

$y_\mathrm{p}{}'' - 9y_\mathrm{p} = -e^x + 9e^x = 8e^x$

(2) $y_\mathrm{p} = -2xe^{-3x}$

$y_\mathrm{p}{}' = -2e^{-3x} + 6xe^{-3x}$

$y_\mathrm{p}{}'' = 6e^{-3x} + 6e^{-3x} - 18xe^{-3x} = 12e^{-3x} - 18xe^{-3x}$

$y_\mathrm{p}{}'' - 9y_\mathrm{p} = 12e^{-3x} - 18xe^{3x} + 18xe^{-3x} = 12e^{-3x}$

(3) $y_\mathrm{p} = -\cos x$

$y_\mathrm{p}{}' = \sin x$

$y_\mathrm{p}{}' = \cos x$

$y_\mathrm{p}{}'' - y_\mathrm{p} = \cos x + \cos x = 2\cos x$

(4) $y_\mathrm{p} = -3x^2 - 6$

$y_\mathrm{p}{}' = -6x$

$y_\mathrm{p}{}'' = -6$

$y_\mathrm{p}{}'' - y_\mathrm{p} = -6 + 3x^2 + 6 = 3x^2$

(5) $y_\mathrm{p} = \dfrac{1}{4}e^{2x}$

$y_\mathrm{p}{}' = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$y_\mathrm{p}{}'' = e^{2x}$

$y_\mathrm{p}{}'' + 5y_\mathrm{p}{}' + 6y_\mathrm{p} = e^{2x} + \dfrac{5}{2}e^{2x} + \dfrac{3}{2}e^{2x} = 5e^{2x}$

(6) $y_\mathrm{p} = 3xe^{-2x}$

$y_\mathrm{p}{}' = 3e^{-2x} - 6xe^{-2x}$

$y_\mathrm{p}{}'' = -6e^{-2x} - 6e^{-2x} + 12xe^{-2x} = -12e^{-2x} + 12xe^{-2x}$

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}{}'' + 5y_\mathrm{p}{}' + 6y_\mathrm{p} &= -12e^{-2x} + 12xe^{-2x} + 15e^{-2x} - 30xe^{-2x} + 18xe^{-2x} \\ &= 3e^{-2x} \end{aligned}$$

(7) $y_\mathrm{p} = \dfrac{1}{3}\cos 3x$

$y_\mathrm{p}{}' = -\sin 3x$

$y_\mathrm{p}{}'' = -3\cos 3x$

$y_\mathrm{p}{}'' - 6y_\mathrm{p}{}' + 9y_\mathrm{p} = -3\cos 3x + 6\sin 3x + 3\cos 3x = 6\sin 3x$

(8) $y_\mathrm{p} = x^2e^{3x}$

$y_\mathrm{p}{}' = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x} = 2xe^{3x} + 3y_\mathrm{p}$

$y_\mathrm{p}{}'' = 2e^{3x} + 6xe^{3x} + 6xe^{3x} + 9x^2e^{3x} = 2e^{3x} + 12xe^{3x} + 9y_\mathrm{p}$

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}{}'' - 6y_\mathrm{p}{}' + 9y_\mathrm{p} &= 2e^{3x} + 12xe^{3x} + 9y_\mathrm{p} - 12xe^{3x} - 18y_\mathrm{p} + 9y_\mathrm{p} \\ &= 2e^{3x} \end{aligned}$$

(9) $y_p = x^2 - \dfrac{2}{9}$

$y_\mathrm{p}{}' = 2x$

$y_{\mathrm{p}}'' = 2$
$y_{\mathrm{p}}'' + 9y_{\mathrm{p}} = 2 + 9x^2 - 2 = 9x^2$

(10) $y_{\mathrm{p}} = -2x\cos 3x$
$y_{\mathrm{p}}' = -2\cos 3x + 6x\sin 3x$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'' &= 6\sin 3x + 6\sin 3x + 18x\cos 3x \\ &= 12\sin 3x + 18x\cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'' + 9y_{\mathrm{p}} &= 12\sin 3x + 18x\cos 3x - 18x\cos 3x \\ &= 12\sin 3x \end{aligned}$$

問題 2 (1) 対応する同次方程式の特性方程式は $P(\lambda) = \lambda^2 - 25 = 0$ であり，異なる実数解 $\lambda = \pm 5$ を持つので，同次方程式の一般解は
$y_{\mathrm{h}} = c_1e^{5x} + c_2e^{-5x}$
である。$r(x) = 4e^{3x}$ で $\alpha = 3$ は特性方程式の解でないので，未定係数法により特殊解を
$y_{\mathrm{p}} = Ke^{3x}$
とおく。
$y_{\mathrm{p}}' = 3Ke^{3x}$，$y_{\mathrm{p}}'' = 9Ke^{3x}$
であるから
$y_{\mathrm{p}}'' - 25y_{\mathrm{p}} = 9Ke^{3x} - 25Ke^{3x} = -16Ke^{3x} = 4e^{3x}$
よって，$K = -\dfrac{1}{4}$
以上より，求める一般解は
$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1e^{5x} + c_2e^{-5x} - \frac{1}{4}e^{3x}$$
(2) 対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 25 = 0$ は，異なる実数解 $\lambda = \pm 5$ を持つので，同次方程式の一般解 y_{h} は
$y_{\mathrm{h}} = c_1e^{5x} + c_2e^{-5x}$
である。$r(x) = 10e^{5x}$ で，$\alpha = 5$ は $P(\lambda) = 0$ の解であるから未定係数法により，特殊解 y_{p} を
$y_{\mathrm{p}} = Kxe^{5x}$
とおく。
$y_{\mathrm{p}}' = Ke^{5x} + 5Kxe^{5x} = Ke^{5x} + 5y_{\mathrm{p}}$
$y_{\mathrm{p}}'' = 5Ke^{5x} + 5Ke^{5x} + 25Kxe^{5x} = 10Ke^{5x} + 25y_{\mathrm{p}}$
であるから
$y_{\mathrm{p}}'' - 25y_{\mathrm{p}} = 10Ke^{5x} + 25y_{\mathrm{p}} - 25y_{\mathrm{p}} = 10Ke^{5x} = 10e^{5x}$
よって，$K = 1$
以上より，求める一般解は
$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1e^{5x} + c_2e^{-5x} + xe^{5x}$
(3) 対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ は異なる実解 $\lambda = 2$，-1 を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は
$y_{\mathrm{h}} = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$
である。$P(0) = -2 \neq 0$ であるので，$r(x) = 4x$ より特殊解 y_{p}
$y_{\mathrm{p}} = K_0 + K_1x$
と置くと
$y_{\mathrm{p}}' = K_1, y_{\mathrm{p}}'' = 0$

であるので

$y_{\mathrm{p}}''-y_{\mathrm{p}}'-2y_{\mathrm{p}}=0-K_1-2K_0-2K_1x=4x$

よって，$K_0=1$，$K_1=-2$

以上より，一般解は

$y=y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-2x+1$

(4)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ は異なる実解 $\lambda=2$，-1 を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$y_{\mathrm{h}}=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

である。$r(x)=4\sin x=4\sin\beta x$ より $P(j\beta)\neq 0$ であるから特殊解 y_{p} を

$y_{\mathrm{p}}=K\cos x+L\sin x$

と置く。

$y_{\mathrm{p}}'=-K\sin x+L\cos x,\quad y_{\mathrm{p}}''=-K\cos x-L\sin x=-y_{\mathrm{p}}$

であるので

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{p}}''-y_{\mathrm{p}}'-2y_{\mathrm{p}}&=-y_{\mathrm{p}}+K\sin x-L\cos x-2y_{\mathrm{p}}\\&=(-3K-L)\cos x+(-3L+K)\sin x=4\sin x\end{aligned}$$

よって

$-3K-L=0\qquad K-3L=4$

$K=\dfrac{2}{5}\qquad L=-\dfrac{6}{5}$

以上より，一般解は

$y=y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\dfrac{2}{5}\cos x-\dfrac{6}{5}\sin x$

(5)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ は重解 $\lambda=2$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$y_{\mathrm{h}}=(c_1+c_2x)e^{2x}$

である。$r(x)=3e^{-x}$ より $\alpha=-1$ で $P(\alpha)=P(-1)\neq 0$ であるから特殊解 y_{p} は

$y_{\mathrm{p}}=Ke^{-x}$

と置ける。

$y_{\mathrm{p}}'=-Ke^{-x}$，$y_{\mathrm{p}}''=Ke^{-x}$

であるので

$y_{\mathrm{p}}''-4y_{\mathrm{p}}'+4y_{\mathrm{p}}=Ke^{-x}+4Ke^{-x}+4Ke^{-x}=9Ke^{-x}=3e^{-x}$

よって，$K=\dfrac{1}{3}$

以上より，与式の一般解 y は

$y=y_{\mathrm{h}}+y_{\mathrm{p}}=(c_1+c_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{3}e^{-x}$

(6)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$ は重解 $\lambda=2$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$y_{\mathrm{h}}=(c_1+c_2x)e^{2x}$

である。$r(x)=4e^{2x}$ より $\alpha=2$ で $P(\alpha)=P(2)=0$ かつ $P'(\alpha)=2\alpha-4=4-4=0$ であるから，特殊解 y_{p} は

$y_{\mathrm{p}}=Kx^2e^{2x}$

と置ける。

$$y_p' = 2Kxe^{2x} + 2Kx^2e^{2x}$$
$$y_p'' = 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x} + 4Kxe^{2x} + 4Kx^2e^{2x}$$
$$= 2Ke^{2x} + 8Kxe^{2x} + 4Kx^2e^{2x}$$

であるので

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2Ke^{2x} + 8Kxe^{2x} + 4Kx^2e^{2x} - 8Kxe^{2x} - 8Kx^2e^{2x} + 4Kx^2e^{2x}$$
$$= 2Ke^{2x} = 4e^{2x}$$

よって，$K = 2$
以上より，与式の一般解 y は

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{2x} + 2x^2e^{2x}$$
$$= (c_1 + c_2x + 2x^2)e^{2x}$$

(7)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ は共役複素解 $\lambda = \pm j$ を持つから，同次方程式の一般解 y_h は

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

である。$r(x) = 2x^2 - 3x + 5$ であるので特殊解は未定定数法により

$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$

と置ける。

$y_p' = 2K_2x + K_1$，$y_p'' = 2K_2$

であるので

$y_p'' + y_p = 2K_2 + K_2x^2 + K_1x + K_0 = K_2x^2 + K_1x + K_0 + 2K_2 = 2x^2 - 3x + 5$

$K_0 = 1$，$K_1 = -3$，$K_2 = 2$

以上より，与式の一般解は

$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2x^2 - 3x + 1$

(8)　(7)と同様に同次方程式の一般解 y_h は

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

である。$r(x) = 2\cos x$ で $\beta = 1$ より $P(\pm j\beta) = P(\pm j) = 0$ であるから，未定係数法により，特殊解 y_p は

$y_p = Kx \cos x + Lx \sin x$

と置ける。

$$y_p' = K\cos x - Kx\sin x + L\sin x + Lx\cos x$$
$$y_p'' = -K\sin x - K\sin x - Kx\cos x + L\cos x + L\cos x - Lx\sin x$$
$$= -2K\sin x - Kx\cos x + 2L\cos x - Lx\sin x$$

であるから

$$y_p'' + y_p = -2K\sin x - Kx\cos x + 2L\cos x - Lx\sin x + Kx\cos x + Lx\sin x$$
$$= -2K\sin x + 2L\cos x = 2\cos x$$

よって，$K = 0$，$L = 1$
以上より，与式の一般解 y は

$$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x$$
$$= c_1\cos x + (c_2 + x)\sin x$$

(9)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) - \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ は，共役複素解 $\lambda = -2 \pm j$

を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$y_{\mathrm{h}} = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

である。$r(x) = e^{-2x}$ より $\alpha = -2$ で $P(\alpha) = P(-2) \neq 0$ であるから，特殊解 y_{p} は

$y_{\mathrm{p}} = Ke^{-2x}$

と置ける。

${y_{\mathrm{p}}}' = -2Ke^{-2x}$，${y_{\mathrm{p}}}'' = 4Ke^{-2x}$

であるので

${y_{\mathrm{p}}}'' + 4{y_{\mathrm{p}}}' + 5y_{\mathrm{p}} = (4K - 8K + 5K)e^{-2x} = Ke^{-2x} = e^{-2x}$

よって，$K = 1$

以上より，与式の一般解は

$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1)$

⑽　⑼と同様に，同次方程式の一般解 y_{h} は

$y_{\mathrm{h}} = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

である。$r(x) = \sin x$ で $\beta = 1$ より $P(\pm j\beta) = P(\pm j) \neq 0$ であるから，特殊解 y_{p} は

$y_{\mathrm{p}} = K \cos x + L \sin x$

と置ける。

${y_{\mathrm{p}}}' = -K \sin x + L \cos x$，${y_{\mathrm{p}}}'' = -K \cos x - L \sin x$

であるから

$$\begin{aligned} {y_{\mathrm{p}}}'' + 4{y_{\mathrm{p}}}' + 5y_{\mathrm{p}} &= -K \cos x - L \sin x + 4(-K \sin x + L \cos x) + 5K \cos x + 5L \sin x \\ &= (4K + 4L) \cos x + (4L - 4K) \sin x = \sin x \end{aligned}$$

$K = -L = -\dfrac{1}{8}$

以上より，与式の一般解は

$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \dfrac{1}{8} \cos x + \dfrac{1}{8} \sin x$

問題 3　(1)　上式より $y = \dfrac{dx}{dt} - 2x$　　①

この両辺を t で微分して

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt}$　　②

①②を下式に代入すると

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = -5x + 4\left(\dfrac{dx}{dt} - 2x\right)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 13x = 0$　　③

対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ は，共役複素解 $\lambda = 3 \pm j2$ を持つから，同次方程式の一般解 $x(t)$ は

$x(t) = e^{3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$

である。

これを①に代入して

$y(t) = e^{3t}\{(c_1 + 2c_2) \cos 2t + (-2c_1 + c_2) \sin 2t\}$

(2)　上式より $y = -\dfrac{dx}{dt} + 5x + e^{3t}$　　①

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+3e^{3t} \qquad ②$$

①②を下式に代入して

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+3e^{3t}=2x+2\left(-\frac{dx}{dt}+5x+e^{3t}\right)-2e^{3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-7\frac{dx}{dt}+12x=3e^{3t} \qquad ③$$

③に対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+12=(\lambda-4)(\lambda-3)=0$ は異なる実数解 $\lambda=4,3$ を持つから，同次方程式の一般解 x_{h} は

$$x_{\mathrm{h}}=c_1e^{4t}+c_2e^{3t}$$

である。$r(t)=3e^{3t}$ より $\alpha=3$ で $P(3)=0$ であるので，特殊解は

$$x_{\mathrm{p}}=Kte^{3t}$$

と置ける。

$$x_{\mathrm{p}}{}'=Ke^{3t}+3Kte^{3t},\ x_{\mathrm{p}}{}''=6Ke^{3t}+9Kte^{3t}$$

であるから

$$x_{\mathrm{p}}{}''-7x_{\mathrm{p}}{}'+12x_{\mathrm{p}}=-Ke^{3t}=3e^{3t}$$

よって，$K=-3$

以上より

$$x=x_{\mathrm{h}}+x_{\mathrm{p}}=c_1e^{4t}+(c_2-3t)e^{3t}$$

これを①に代入して

$$y=c_1e^{4t}+2(c_2-3t+2)e^{3t}$$

2-4　演習問題　解答

1.⑴　題意より

$$y_{\mathrm{p1}}{}''+ay_{\mathrm{p1}}{}'+by_{\mathrm{p1}}=r_1(x) \qquad ①$$

$$y_{\mathrm{p2}}{}''+ay_{\mathrm{p2}}{}'+by_{\mathrm{p2}}=r_2(x) \qquad ②$$

である。y_{p1} と y_{p2} の線形結合を y_{p} とすると

$$y_{\mathrm{p}}=A_1y_{\mathrm{p1}}+A_2y_{\mathrm{p2}}$$

であり

$$y_{\mathrm{p}}{}'=A_1y_{\mathrm{p1}}{}'+A_2y_{\mathrm{p2}}{}'$$

$$y_{\mathrm{p}}{}''=A_1y_{\mathrm{p1}}{}''+A_2y_{\mathrm{p2}}{}''$$

であるから

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{p}}{}''+ay_{\mathrm{p}}{}'+by_{\mathrm{p}}&=A_1y_{\mathrm{p1}}{}''+A_2y_{\mathrm{p2}}{}''+a(A_1y_{\mathrm{p1}}{}'+A_2y_{\mathrm{p2}}{}')+b(A_1y_{\mathrm{p1}}+A_2y_{\mathrm{p2}})\\&=A_1(y_{\mathrm{p1}}{}''+ay_{\mathrm{p1}}{}'+by_{\mathrm{p1}})+A_2(y_{\mathrm{p2}}{}''+ay_{\mathrm{p2}}{}'+by_{\mathrm{p2}})\end{aligned}$$

①②を代入して

$$y_{\mathrm{p}}{}''+ay_{\mathrm{p}}{}'+by_{\mathrm{p}}=A_1r_1(x)+A_2r_2(x) \qquad ③$$

となり，y_{p} は微分方程式③の特殊解である。

⑵　ⅰ．対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2-1=0$ は，異なる実解 $\lambda=\pm1$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$$y_{\mathrm{h}}=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

である。$r(x)=4e^{3x}+2\cos x$ であるから，与式の特殊解 y_{p} は

$$y_{\mathrm{p}}=A_1e^{3x}+A_2\cos x+A_3\sin x$$

と置ける。

$$y_{\mathrm{p}}{}'=3A_1e^{3x}-A_2\sin x+A_3\cos x$$

$$y_\mathrm{p}'' = 9A_1e^{3x} - A_2\cos x - A_3\sin x$$

であるから

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'' - y_\mathrm{p} &= 9A_1e^{3x} - A_2\cos x - A_3\sin x - (A_1e^{3x} + A_2\cos x + A_3\sin x) \\ &= 8A_1e^{3x} - 2A_2\cos x - 2A_3\sin x \qquad \left(A_1 = \frac{1}{2},\ A_2 = -1,\ A_3 = 0\right) \\ &= 4e^{3x} + 2\cos x \end{aligned}$$

以上より，与式の一般解は

$$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - \cos x$$

ⅱ．対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$ は異なる実解 $\lambda = -2, -3$ を持つから，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_\mathrm{h} = c_1e^{-2x} + c_2e - 3x$$

である。$r(x) = 4\sin 2x + 6x^2 + 1$ より，与式の特殊解 y_p は

$$y_\mathrm{p} = K\cos 2x + L\sin 2x + K_2x^2 + K_1x + K_0$$

と置ける。

$$y_\mathrm{p}' = -2K\sin 2x + 2L\cos 2x + 2K_2x + K_1$$
$$y_\mathrm{p}'' = -4K\cos 2x - 4L\sin 2x + 2K_2$$

であるから，

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'' + 5y_\mathrm{p}' + 6y_\mathrm{p} &= -4K\cos 2x - 4L\sin 2x + 2K_2 - 10K\sin 2x + 10L\cos 2x \\ &\quad + 10K_2x + 5K_1 + 6K\cos 2x + 6L\sin 2x + 6K_2x^2 + 6K_1x + 6K_0 \\ &= (2K + 10L)\cos 2x + (-10K + 2L)\sin 2x + 6K_2x^2 \\ &\quad + (10K_2 + 6K_1)x + (2K_2 + 5K_1 + 6K_0) \\ &= 4\sin 2x + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

すなわち

$$K + 5L = 0$$
$$-10K + 2L = -2(5K - L) = 4$$

よって，$K = -\dfrac{5}{13} \qquad L = \dfrac{1}{13}$

$$6K_2 = 6 \qquad K_2 = 1$$

$$5K_2 + 3K_1 = 0 \qquad 2K_2 + 5K_1 + 6K_0 = 1$$

$$K_1 = -\frac{5}{3} \qquad K_0 = \frac{11}{9}$$

以上より

$$y_\mathrm{p} = -\frac{5}{13}\cos 2x + \frac{1}{13}\sin 2x + x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{11}{9}$$

したがって，与式の一般解 y は

$$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} - \frac{5}{13}\cos 2x + \frac{1}{13}\sin 2x + x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{11}{9}$$

ⅲ．対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2) = 0$ は重解 $\lambda = 2$ を持つから，同次方程式の一般解 y_h は，

$$y_\mathrm{h} = (c_1 + c_2x)e^{2x}$$

である。$P'(\lambda) = 2(\lambda - 2)$ と $r(x) = 3e^x + 4e^{2x}$ において，$\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 2$ より $P(\alpha_1) = P(1) = 1 \neq 0$，$P(\alpha_2) = P(2) = 0$，$P'(\alpha_2) = P'(2) = 0$ なので，与式の特殊解 y_{p} は

$$y_{\mathrm{p}} = A_1 e^x + A_2 x^2 e^{2x}$$

と置ける。この微分は，

$$\begin{aligned} {y_{\mathrm{p}}}' &= A_1 e^x + 2A_2 x e^{2x} + 2A_2 x^2 e^{2x} \\ {y_{\mathrm{p}}}'' &= A_1 e^x + 2A_2 e^{2x} + 4A_2 x e^{2x} + 4A_2 x e^{2x} + 4A_2 x^2 e^{2x} \\ &= A_1 e^x + 2A_2 e^{2x} + 8A_2 x e^{2x} + 4A_2 x^2 e^{2x} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} {y_{\mathrm{p}}}'' - 4{y_{\mathrm{p}}}' + 4y_{\mathrm{p}} &= A_1 e^x + 2A_2 e^{2x} + 8A_2 x e^{2x} + 4A_2 x^2 e^{2x} - 4A_1 e^x - 8A_2 x e^{2x} \\ &\quad - 8A_2 x^2 e^{2x} + 4A_1 e^x + 4A_2 x^2 e^{2x} \\ &= A_1 e^x + 2A_1 e^{2x} \\ &= 3e^x + 4e^{2x} \end{aligned}$$

よって $A_1 = 3$，$A_2 = 2$ であるから

$$y_{\mathrm{p}} = 3e^x + 2x^2 e^{2x}$$

以上より

$$\begin{aligned} y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} &= (c_1 + c_2 x)e^{2x} + 3e^x + 2x^2 e^{2x} \\ &= (c_1 + c_2 x + 2x^2)e^{2x} + 3e^x \end{aligned}$$

iv．対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ は，共役複素解 $\lambda = \pm j$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$$y_{\mathrm{h}} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

である。$r(x) = -4\sin 3x + 6\cos 2x$ で $\beta_1 = 3$，$\beta_2 = 2$ で $P(\pm j\beta_1) \neq 0$，$P(\pm j\beta_2) \neq 0$ であるから，与式の特殊解 y_{p} は未定係数法により

$$y_{\mathrm{p}} = K_1 \cos 3x + L_1 \sin 3x + K_2 \cos 2x + L_2 \sin 2x$$

と置ける。x で微分すると

$$\begin{aligned} {y_{\mathrm{p}}}' &= -3K_1 \sin 3x + 3L_1 \cos 3x - 2K_2 \sin 2x + 2L_2 \cos 2x \\ {y_{\mathrm{p}}}'' &= -9K_1 \cos 3x - 9L_1 \sin 3x - 4K_2 \cos 2x - 4L_2 \sin 2x \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} {y_{\mathrm{p}}}'' + y_{\mathrm{p}} &= -8K_1 \cos 3x - 8L_1 \sin 3x - 3K_2 \cos 2x - 3L_2 \sin 2x \\ &= -4\sin 3x + 6\cos 2x \end{aligned}$$

よって，$K_1 = 0$，$L_1 = \dfrac{1}{2}$，$K_2 = -2$，$L_2 = 0$

$$y_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\sin 3x - 2\cos 2x$$

以上より，与式の一般解 y

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}\sin 3x - 2\cos 2x$$

2.（1）　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ は異なる実解 $\lambda = 2, -1$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$$y_{\mathrm{h}} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

である。$r(x) = x$ であるから，与式の特殊解 y_{p} は未定係数法により

$$y_{\mathrm{p}} = K_1 x + K_0$$

と置ける。$y_p{}' = K_1$，$y_p{}'' = 0$ であるので

$$y_p{}'' - y_p{}' - 2y_p = -K_1 - 2K_1x - 2K_0 = -2K_1x - (K_1 + 2K_0) = x$$

$$K_1 = -\frac{1}{2}, \quad K_0 = \frac{1}{4}$$

以上より

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$y' = 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x} - \frac{1}{2}$$

初期値より

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1 \qquad y'(0) = 2c_1 - c_2 - \frac{1}{2} = 0$$

であるから

$$c_1 = \frac{5}{12}, \ c_2 = \frac{1}{3}$$

したがって与式の解は

$$y = \frac{5}{12}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

(2) 対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ は，重解 $\lambda = 1$ を持つから，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h = (c_1 + c_2x)e^x$$

である。$r(x) = e^{2x}$ であるから，与式の特殊解 y_p は未定係数法により

$$y_p = Ke^{2x}$$

と置ける。これを x で微分して $y_p{}' = 2Ke^{2x}$，$y_p{}'' = 4Ke^{2x}$ であるから

$$y_p{}'' - 2y_p{}' + y_p = 4Ke^{2x} - 4Ke^{2x} + Ke^{2x} = e^{2x}$$

よって，$K = 1$

以上より，与式の一般解 y は

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^x + e^{2x}$$

である。これを微分すると

$$y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x + 2e^{2x}$$

初期値より

$$y(0) = c_1 + 1 = 4 \qquad c_1 = 3$$

$$y'(0) = c_1 + c_2 + 2 = 3 \qquad c_2 = -2$$

したがって，与式の解は

$$y = (3 - 2x)e^x + e^{2x}$$

(3) 対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ は，共役複素解 $\lambda = \pm j$ を持つから，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

である。$r(x) = 2\sin x$ であり $\beta = 1$ であるから，$P(\pm j\beta) = P(\pm j) = 0$ であるので，未定係数法により与式の特殊解 y_p は

$$y_p = Kx\cos x + Lx\sin x$$

と置ける。これを x で微分して

$$y_p{}' = K\cos x - Kx\sin x + L\sin x + Lx\cos x$$

$$\begin{aligned} y_p{}'' &= -K\sin x - K\sin x - Kx\cos x + L\cos x + L\cos x - Lx\sin x \\ &= -2K\sin x - Kx\cos x + 2L\cos x - Lx\sin x \end{aligned}$$

よって

$$y_{\mathrm{p}}'' + y_{\mathrm{p}} = -2K\sin x - 2L\cos x = 2\sin x$$

よって，$K = -1$，$L = 0$

したがって，与式の一般解は

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x$$

である。これを x で微分すると

$$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x - \cos x + x\sin x$$

初期値より

$$y(0) = c_1 = 5$$

$$y'(0) = c_2 - 1 = 4 \qquad c_2 = 5$$

以上より，与式の解は

$$y = (5 - x)\cos x + 5\sin x$$

(4)　対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda + 5)(\lambda - 3) = 0$ は，異なる実解 $\lambda = -5, 3$ を持つから，同次方程式の一般解 y_{h} は

$$y_{\mathrm{h}} = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x}$$

である。$r(x) = 6\cos 3x + 9e^{4x}$ であるから $P(\pm j3) \neq 0$，$P(4) \neq 0$ であるので未定係数法により，与式の特殊解 y_{p} は

$$y_{\mathrm{p}} = K_1\cos 3x + L_1\sin 3x + K_2e^{4x}$$

と置ける。この両辺を x で微分して

$$y_{\mathrm{p}}' = -3K_1\sin 3x + 3L_1\cos 3x + 4K_2e^{4x}$$

$$y_{\mathrm{p}}'' = -9K_1\cos 3x - 9L_1\sin 3x + 16K_2e^{4x}$$

これを与式に代入して

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'' + 2y_{\mathrm{p}}' - 15y_{\mathrm{p}} &= -9K_1\cos 3x - 9L_1\sin 3x + 16K_2e^{4x} - 6K_1\sin 3x + 6L_1\cos 3x \\ &\quad + 8K_2e^{4x} - 15K_1\cos 3x - 15L_1\sin 3x - 15K_2e^{4x} \\ &= (6L_1 - 24K_1)\cos 3x - (24L_1 + 6K_1)\sin 3x + 9K_2e^{4x} \\ &= 6\cos 3x + 9e^{4x} \end{aligned}$$

よって

$$L_1 - 4K_1 = 1 \qquad K_1 = -\frac{4}{17}$$

$$4L_1 + K_1 = 0 \qquad L_1 = \frac{1}{17}$$

$$9K_2 = 9 \qquad K_2 = 1$$

$$y_{\mathrm{p}} = -\frac{4}{17}\cos 3x + \frac{1}{17}\sin 3x + e^{4x}$$

以上より，与式の一般解 y は

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{17}\cos 3x + \frac{1}{17}\sin 3x + e^{4x}$$

両辺を x で微分して

$$y' = -5c_1e^{-5x} + 3c_2e^{3x} + \frac{12}{17}\sin 3x + \frac{3}{17}\cos 3x + 4e^{4x}$$

初期値より

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{4}{17} + 1 = 6 \qquad c_1 = \frac{355}{136}$$

$$y'(0) = -5c_1 + 3c_2 + \frac{3}{17} + 4 = -1 \qquad c_2 = \frac{357}{136} = \frac{21}{8}$$

以上より

$$y = \frac{355}{136}e^{-5x} + \frac{21}{8}e^{3x} - \frac{4}{17}\cos 3x + \frac{1}{17}\sin 3x + e^{4x}$$

(5) 与式の下式より

$$x = \frac{dy}{dt} - 4y - 3e^{2t} \qquad ①$$

両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 6e^{2t} \qquad ②$$

①②を上式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 6e^{2t} = 2\frac{dy}{dt} - 8y - 6e^{2t} + 3y + 2e^{2t}$$

整理して

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 5y = 2e^{2t} \qquad ③$$

③の対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$ は異なる実解 $\lambda = 1, 5$ を持つので，同次方程式の一般解 y_{h} は

$$y_{\mathrm{h}} = c_1e^t + c_2e^{5t}$$

である。③式より $r(t) = 2e^{2t}$ であるので，未定係数法により③の特殊解 y_{p} は

$$y_{\mathrm{p}} = Ke^{2t},\ y_{\mathrm{p}}' = 2Ke^{2t}, y_{\mathrm{p}}'' = 4Ke^{2t}$$

これらを③に代入して

$$y_{\mathrm{p}}'' - 6y_{\mathrm{p}}' + 5y_{\mathrm{p}} = (4K - 12K + 5K)e^{2t} = -3Ke^{2t} = 2e^{2t}$$

よって，$K = -\frac{2}{3}$

$$y_{\mathrm{p}} = -\frac{2}{3}e^{2t}$$

すなわち③の一般解 y は

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = c_1e^t + c_2e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}$$

両辺を t で微分すると

$$\frac{dy}{dt} = c_1e^t + 5c_2e^{5t} - \frac{4}{3}e^{2t}$$

これらを①に代入して

$$\begin{aligned} x = \frac{dy}{dt} - 4y - 3e^{2t} &= c_1e^t + 5c_2e^{5t} - \frac{4}{3}e^{2t} - 4c_1e^t - 4c_2e^{5t} + \frac{8}{3}e^{2t} - 3e^{2t} \\ &= -3c_1e^t + c_2e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

初期値より

$$x(0) = -3c_1 + c_2 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \qquad -3c_1 + c_2 = 3$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \qquad c_1 + c_2 = 3$$

よって，$c_1 = 0 \quad c_2 = 3$

以上より

$$x(t)=3e^{5t}-\frac{5}{3}e^{2t}$$

$$y(t)=3e^{5t}-\frac{2}{3}e^{2t}$$

3．キルヒホッフの法則より，LC 回路の微分方程式は

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}I(\tau)d\tau=E(t)=100\sin t$$

である。$\dfrac{d^2Q}{dt^2}=\dfrac{dI}{dt}$，$Q=\displaystyle\int_{t_0}^{t}I(\tau)d\tau$ を用いると

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q=\frac{1}{L}100\sin t \qquad ①$$

対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda)=\lambda^2+\dfrac{1}{LC}=0$ は，共役複素解

$$\lambda=\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}=\pm j2$$

を持つから，同次方程式の一般解 Q_{h} は

$$Q_{\mathrm{h}}=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$$

である。$r(t)=\dfrac{100}{L}\sin t=100\sin t$ であるので，未定係数法により①の特殊解 Q_{p} は

$$Q_{\mathrm{p}}=K\cos t+L\sin t$$

と置ける。これを t で微分すると

$$\frac{dQ_{\mathrm{p}}}{dt}=-K\sin t+L\cos t$$

$$\frac{d^2Q_{\mathrm{p}}}{dt^2}=-K\cos t-L\sin t$$

これらを①へ代入して

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_{\mathrm{p}}}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q_{\mathrm{p}}&=-K\cos t-L\sin t+4(K\cos t+L\sin t)\\&=3K\cos t+3L\sin t\\&=100\sin t\end{aligned}$$

よって，$K=0$，$L=\dfrac{100}{3}$

以上より，①の一般解は

$$Q=Q_{\mathrm{h}}+Q_{\mathrm{p}}=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{100}{3}\sin t$$

両辺を t で微分すると

$$I=\frac{dQ}{dt}=-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t+\frac{100}{3}\cos t$$

初期値より

$$Q(0)=c_1=0$$

$$I(0) = 2c_2 + \frac{100}{3} = 0 \qquad c_2 = -\frac{50}{3}$$

よって

$$I(t) = \frac{100}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

4．前問と同様にして $Q(t)$ に関する微分方程式を求めると

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{E(t)}{L}$$

であり，$R = 40\Omega$，$L = 20\mathrm{H}$，$C = \dfrac{1}{100}\mathrm{F}$，$E(t) = 100\cos 2t[\mathrm{V}]$ を代入すると

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\frac{dQ}{dt} + 5Q = 5\cos 2t \qquad ①$$

となる。対応する同次方程式の特性方程式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ は，共役複素解 $\lambda = -1 \pm j2$ を持つので，同次方程式の一般解 Q_h は

$$Q_\mathrm{h} = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t)$$

である。$r(t) = 5\cos 2t$ であるので①の特殊解 Q_p は

$$Q_\mathrm{p} = K\cos 2t + L\sin 2t$$

と置ける。この両辺を t で微分すると

$$\frac{dQ_\mathrm{p}}{dt} = -2K\sin 2t + 2L\cos 2t$$

$$\frac{d^2Q_\mathrm{p}}{dt^2} = -4K\cos 2t - 4L\sin 2t$$

これらを①に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_\mathrm{p}}{dt^2} + 2\frac{dQ_\mathrm{p}}{dt} + 5Q_\mathrm{p} &= -4K\cos 2t - 4L\sin 2t + 4L\cos 2t - 4K\sin 2t \\ &\quad + 5K\cos 2t + 5L\sin 2t \\ &= (K + 4L)\cos 2t + (-4K + L)\sin 2t = 5\cos 2t\end{aligned}$$

よって

$$K + 4L = 5 \qquad -4K + L = 0$$

$$K = \frac{5}{17} \qquad L = \frac{20}{17}$$

以上より①の一般解 Q は

$$Q = Q_\mathrm{h} + Q_\mathrm{p} = e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + \frac{5}{17}\cos 2t + \frac{20}{17}\sin 2t$$

この両辺を微分して

$$I = \frac{dQ}{dt} = -e^{-t}(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) + e^{-t}(-2c_1\sin 2t + 2c_2\cos 2t) - \frac{10}{17}\sin 2t + \frac{40}{17}\cos 2t$$

初期値より

$$Q(0) = c_1 + \frac{5}{17} = 0 \qquad c_1 = -\frac{5}{17}$$

$$I(0) = -c_1 + 2c_2 + \frac{40}{17} = 0 \qquad c_2 = -\frac{45}{34}$$

したがって電流 $I(t)$ は

$$I(t) = e^{-t}\left(-\frac{40}{17}\cos 2t + \frac{65}{34}\sin 2t\right) - \frac{10}{17}\sin 2t + \frac{40}{17}\cos 2t$$

2-5　ドリル問題　解答

問題 1 ⑴

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4c(x+ct)e^{-2(x+ct)^2} - \frac{1}{2}c(x-ct)e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16c^2(x+ct)^2e^{-2(x+ct)^2} - 4c^2e^{-2(x+ct)^2} - \frac{1}{2}c^2(x-ct)^2e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2} + \frac{1}{2}c^2e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4(x+ct)e^{-2(x+ct)^2} + \frac{1}{2}(x-ct)e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16(x+ct)^2e^{-2(x+ct)^2} - 4e^{-2(x+ct)^2} - \frac{1}{2}(x-ct)^2e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2}$$

以上より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

⑵

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega c \sin\omega x \sin\omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 c^2 \sin\omega x \cos\omega ct$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega \cos\omega x \cos\omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 \sin\omega x \cos\omega ct$$

以上より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

⑶

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega c \sin\omega x \cos\omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 c^2 \sin\omega x \sin\omega ct$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega \cos\omega x \sin\omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 \sin\omega x \sin\omega ct$$

以上より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega c \cos \omega x \sin \omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 c^2 \cos \omega x \cos \omega ct$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\omega \sin \omega x \cos \omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 \cos \omega x \cos \omega ct$$

以上より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega c c_1 \sin \omega x \cos \omega ct - \omega c c_2 \cos \omega x \sin \omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 c^2 c_1 \sin \omega x \sin \omega ct - \omega^2 c^2 c_2 \cos \omega x \cos \omega ct = -\omega^2 c^2 u(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega c_1 \cos \omega x \sin \omega ct - \omega c_1 \sin \omega x \cos \omega ct$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 c_1 \sin \omega x \sin \omega ct - \omega^2 c_1 \cos \omega x \cos \omega ct = -\omega^2 u(x,t)$$

以上より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

問題 2　(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -3e^{-3t} \sin x = -3u(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-3t} \cos x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-3t} \sin x = -u(x,t)$$

以上より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{3}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -e^{-t}\cos 4x = -u(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4e^{-t}\sin 4x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4^2 e^{-t}\cos 4x = -4^2 u(x,t)$$

以上より

$$4^2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2e^{-2t}\sin\omega x = -2u(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega e^{-2t}\cos\omega x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 e^{-2t}\sin\omega x = -\omega^2 u(x,t)$$

以上より

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sqrt{2}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2e^{-2t}\cos\omega x = -2u(x,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\omega e^{-2t}\sin\omega x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 e^{-2t}\cos\omega x = -\omega^2 u(x,t)$$

以上より

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sqrt{2}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -2e^{-2t}(c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x) = -2u(x,t) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \omega e^{-2t}(c_1 \cos \omega x - c_2 \sin \omega x) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\omega^2 e^{-2t}(c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x) = -\omega^2 u(x,t)
\end{aligned}
$$

以上より

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sqrt{2}^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

問題 3　(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2x \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \cos y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \cos y
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x \sinh y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\sin x \sinh y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \cosh y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sin x \sinh y
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos x \cosh y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x \cosh y$$

したがって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c_1 \cos x \sinh y - c_2 \sin x \cosh y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -c_2 \sin x \sinh y - c_2 \cos x \cosh y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = c_1 \sin x \cosh y + c_2 \cos x \sinh y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c_1 \sin x \sinh y + c_2 \cos x \cosh y$$

以上より
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

問題 4　(1)　$u(x, y) = X(x)Y(y)$ の形をした変数分離解を仮定する。
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx}Y(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)\frac{dY(y)}{dy}$$

これらを与式に代入して
$$u_x + u_y = \frac{dX(x)}{dx}Y(y) + X(x)\frac{dY(y)}{dy} = 0$$

変数を分離すると
$$\frac{\dfrac{dX(x)}{dx}}{X(x)} = \frac{\dfrac{-dY(y)}{dy}}{Y(y)}$$

となり，この式がいかなる x, y に対して成り立つためには両辺の値が定数でなければならない。この値を $-k$ とおけば，X と Y のそれぞれの常微分方程式が得られる。
$$\frac{dX(x)}{dx} + kX(x) = 0 \quad \text{よって}, X = c_1 e^{-kx}$$
$$\frac{dY(y)}{dy} - kY(y) = 0 \quad \text{よって}, Y = c_2 e^{ky}$$

以上より
$$u(x, y) = ce^{k(-x+y)}$$

である。ただし，$c=c_1c_2$ とした。

(2) $u(x,y)=X(x)Y(y)$ の形をした変数分離解を仮定する。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dX}{dx}Y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=X\frac{dY}{dy}$$

であるから，これらを与式に代入して

$$u_x+u_y=\frac{dX}{dx}Y+X\frac{dY}{dy}=(x+y)XY$$

が得られる。変数を分離して整理すると

$$\frac{\frac{dX}{dx}}{X}-x=-\frac{\frac{dY}{dy}}{Y}+y=k(\text{定数})$$

が得られる。これより，X と Y のそれぞれの微分方程式

$$\frac{dX}{dx}=(x+k)X$$
$$\frac{dY}{dy}=(y-k)Y$$

が得られる。これらは，1 階線形微分方程式であり，一般解は

$$X=c_1e^{\frac{1}{2}x^2+kx}$$
$$Y=c_2e^{\frac{1}{2}y^2-ky}$$

であるから，求める一般解は $c=c_1c_2$ として

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=ce^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)+k(x-y)}$$

である。

(3) $u(x,y)=X(x)Y(y)$ の形をした変数分離解を仮定する。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dX}{dx}Y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=X\frac{dY}{dy}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dX}{dx}Y\right)=\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}$$

であるから，これらを与式に代入して

$$u_{xy}-u=\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}-XY=0$$

が得られる。変数を分離して整理すると

$$\frac{\frac{dX}{dx}}{X}=\frac{Y}{\frac{dY}{dy}}=k(\text{定数})$$

が得られる。これより，X と Y のそれぞれの微分方程式

$$\frac{dX}{dx}-kX=0$$
$$\frac{dY}{dx}-\frac{1}{k}Y=0$$

が得られる。これらの一般解は，

$$X=c_1e^{kx},\quad Y=c_2e^{\frac{y}{k}}$$

であるから，求める一般解 は $c=c_1c_2$ として

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=ce^{kx+\frac{1}{k}y}$$

である。

(4) $u(x,y)=X(x)Y(y)$ の形をした変数分離解を仮定する。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dX}{dx}Y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=X\frac{dY}{dy}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}$$

であるから，これを与式に代入して

$$y\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}+2xXY=0$$

が得られる。変数を分離して整理すると

$$\frac{y\dfrac{dY}{dy}}{Y}=-\frac{2xX}{\dfrac{dX}{dx}}=k(\text{定数})$$

が得られる。これより，X と Y のそれぞれの微分方程式

$$\frac{dY}{Y}=\frac{k}{y}dy$$
$$\frac{dX}{X}=-\frac{2x}{k}dx$$

が得られる。これらの一般解は

$$Y=c_1y^k$$
$$X=c_2e^{-\frac{x^2}{k}}$$

であるから，求める一般解は $c=c_1c_2$ として

$$\begin{aligned}u(x,y)&=X(x)Y(y)\\&=cy^ke^{-\frac{x^2}{k}}\qquad (c,\ k \text{は任意定数})\end{aligned}$$

2-5　演習問題　解答

1．1 次元波動方程式の変数分離解は 2-5-2 項の方法により求められ，式 2-105 で与えられる。このうち境界条件

$$u(0,t)=u_x(L,t)=0\qquad (0<t<\infty)$$

を満足する解は

$$u(x,t)=(A\cos\mu x+B\sin\mu x)(C\cos\mu ct+D\sin\mu ct)$$

である。

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-\mu(A\sin\mu x-B\cos\mu x)(C\cos\mu ct+D\sin\mu ct)$$

境界条件より

$$u(0,t)=A(C\cos\mu ct+D\sin\mu ct)=0$$

よって，$A=0$

$$u_x(L,t)=\mu B\cos\mu L(C\cos\mu ct+D\sin\mu ct)=0$$

$B\neq 0$ であるから

$$\mu L=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

よって，$\mu_n = \dfrac{\pi}{L}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$

以上より，求める一般解は

$$u(x,t) = B\sin\mu_n x(C\cos\mu_n ct + D\sin\mu_n ct)$$

$$\text{ただし}, \mu_n = \frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

2．1 次元拡散方程式の変数分離解は，2-5-3 項の方法により求められ式 2-109 で与えられる。

(1)　このうち境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty)$$

を満足する解は,

$$u(x,t) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)e^{-c^2\mu^2 t}$$

である。境界条件より

$$u(0,t) = Ae^{-c^2\mu^2 t} = 0$$

よって，$A = 0$

$$u(L,t) = B\sin\mu L\cdot e^{-c^2\mu^2 t}$$

$B \neq 0$ であるから，$\mu L = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

よって，$\mu_n = n\dfrac{\pi}{L}$

以上より

$$u(x,t) = B\sin\frac{n\pi}{L}x\cdot e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t} = B\sin\mu_n x\cdot e^{-c^2{\mu_n}^2 t} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2)　境界条件 $u(0,t) = 0$ を満たす変数分離解は

$$u(x,t) = (A\cos\mu x + B\sin\mu x)e^{-c^2\mu^2 t}$$

および

$$u(x,t) = Ax + B$$

であり $u(0,t) = 0$ より

$$u(x,t) = B\sin\mu x\cdot e^{-c^2\mu^2 t}$$

$$u_x(x,t) = \mu B\cos\mu x\cdot e^{-c^2\mu^2 t}$$

あるいは

$$u(x,t) = Ax$$

$$u_x(x,t) = A$$

もう一方の境界条件より

$$\begin{aligned} u(L,t) + hu_x(L,t) &= B\sin\mu L\cdot e^{-c^2\mu^2 t} + h\mu B\cos\mu L\cdot e^{-c^2\mu^2 t} \\ &= Be^{-c^2\mu^2 t}(\sin\mu L + h\mu\cos\mu L) = 0 \qquad ① \end{aligned}$$

あるいは

$$u(L,t) + hu_x(L,t) = AL + hA = 0 \qquad \therefore A = 0 \qquad ②$$

①の場合，μ は次の式の解である

$$\tan\mu L = \frac{\sin\mu L}{\cos\mu L} = -h\mu$$

μ は $y = \tan\mu L$ と $y = -h\mu$ のグラフの交点から求まり，それらを

$$\mu_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

とおくと，求める一般解は,

$u(x,t) = Be^{-c^2{\mu_n}^2 t}\sin\mu_n x$

3. (1) 変数分離解を $u(x,y) = X(x)Y(y)$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX}{dx}Y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2X}{dx^2}Y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = X\frac{dY}{dy}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X\frac{d^2Y}{dy^2}$$

である。これらを与式に代入すると

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{d^2X}{dx^2}Y + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

となる。これを変数分離して整理すると

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{\frac{d^2Y}{dy^2}}{Y} = -k(\text{定数})$$

である。これより，X と Y のそれぞれの微分方程式

$$\frac{d^2X}{dx^2} + kX = 0$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2} - kY = 0$$

が得られる。一般解は

$$X = c_1\cos\sqrt{k}x + c_2\sin\sqrt{k}x$$
$$Y = c_3e^{\sqrt{k}y} + c_4e^{-\sqrt{k}y}$$

したがって一般解は

$$u(x,y) = (c_1\cos\sqrt{k}x + c_2\sin\sqrt{k}x)(c_3e^{\sqrt{k}y} + c_4e^{-\sqrt{k}y})$$

である。境界条件より

$$u(0,y) = c_1Y(y) = 0$$

より，$c_1 = 0$

$$u(a,y) = c_2\sin\sqrt{k}a\cdot Y(y) = 0$$

より

$$\sqrt{k}a = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

よって，$\sqrt{k} = \dfrac{n\pi}{a}$

以上より

$$u(x,y) = c_2\sin\frac{n\pi x}{a}\left(c_3e^{\frac{n\pi y}{a}} + c_4e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)$$

(2) (1)より

$$u(x,y) = (c_1\cos\sqrt{k}x + c_2\sin\sqrt{k}x)(c_3e^{\sqrt{k}y} + c_4e^{-\sqrt{k}y})$$

x で偏微分すると

$$u_x(x,y) = \sqrt{k}(-c_1\sin\sqrt{k}x + c_2\cos\sqrt{k}x)(c_3e^{\sqrt{k}y} + c_4e^{-\sqrt{k}y})$$

である。境界条件より

$$u_x(0,y) = \sqrt{k}c_2(c_3e^{\sqrt{k}y} + c_4e^{-\sqrt{k}y}) = 0$$

よって，$c_2 = 0$

$$u_x(a,y) = -\sqrt{k}c_1 \sin\sqrt{k}a(c_3 e^{\sqrt{k}y} + c_4 e^{-\sqrt{k}y}) = 0$$
より
$$\sqrt{k}a = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
よって，$\sqrt{k} = \dfrac{n\pi}{a}$

以上より，一般解は，
$$u(x,y) = c_1 \cos\frac{n\pi x}{a}\left(c_3 e^{\frac{n\pi y}{a}} + c_4 e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)$$

2 章　ワークシート問題　解答

1．キルヒホッフの法則より
$$RI + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(\tau)d\tau = E$$
である。$\dfrac{dQ}{dt} = I, Q = \displaystyle\int I(\tau)d\tau$ を用いて書き換えると
$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E}{R} \qquad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q + \frac{E}{R} = -\frac{1}{RC}(Q - EC)$$
となり，これを変数分離して
$$\frac{dQ}{Q - EC} = -\frac{1}{RC}dt$$
よって一般解は $Q(t) = EC + ce^{-\frac{t}{RC}}$

初期条件より
$$Q(0) = EC + c = 0$$
となり
$$c = -EC$$
したがって
$$Q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
これを t で微分して
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

2．(1)　$k_1 = \dfrac{k}{m}$ とすると，$g - k_1 v \neq 0$ のとき変数分離して
$$\frac{dv}{g - k_1 v} = dt$$
両辺を積分して
$$\int \frac{dv}{g - k_1 v} = \int dt$$
$$-\frac{1}{k_1}\log|g - k_1 v| = t + C_1$$
$$\log|g - k_1 v| = -k_1 t - k_1 C_1$$
$$|g - k_1 v| = e^{-k_1 C_1}e^{-k_1 t}$$

$$g - k_1 v = \pm e^{-k_1 C_1} e^{-k_1 t} = C_2 e^{-k_1 t}$$

$$C_2 = \pm e^{-k_1 C_1}$$

v について整理すると

$$v = \frac{g}{k_1}(1 - Ce^{-k_1 t}) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$t = 0$ のとき $v = 0$ より $C = 1$。ゆえに特殊解は,

$$v = \frac{g}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

(2) $k_1 = \dfrac{k}{m}$ とすると, $\dfrac{dv}{dt} = g - k_1 v^2$

$g = k_1 v^2 \neq 0$ のとき変数分離して

$$\frac{dv}{g - k_1 v^2} = dt$$

$$\frac{dv}{v^2 - \sqrt{\frac{g}{k_1}}^2} = -k_1 dt$$

両辺を積分して

$$\int \frac{dv}{v^2 - \sqrt{\frac{g}{k_1}}^2} = -k_1 \int dt$$

$$-\sqrt{\frac{k_1}{g}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{k_1}{g}} v = -k_1 t + C_1$$

$$\tanh^{-1} \sqrt{\frac{k_1}{g}} v = \sqrt{gk_1} t + C \qquad C = -\sqrt{\frac{g}{k_1}} C_1 \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k_1}} \tanh(\sqrt{gk_1} t + C)$$

$t = 0$ のとき, $v = 0$ より $C = 0$, ゆえに特殊解は

$$v = \sqrt{\frac{g}{k_1}} \tanh(\sqrt{gk_1} t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

3. (1) $u = y^{1-\alpha}$ の両辺を微分すると

$$u' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y'$$

よって

$$y' = \frac{u'}{1 - \alpha} y^{\alpha}$$

これらを与式に代入すると

$$\frac{u'}{1 - \alpha} y^{\alpha} + p(x) y = q(x) y^{\alpha}$$

両辺に $(1-\alpha)$ を掛け，y^{α} で割り，$u=y^{1-\alpha}$ の変換を行うと

$$u'+(1-\alpha)p(x)u=(1-\alpha)q(x)$$

となる。

⑵　ⅰ）　$u=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと

$$u'=-y^{-2}y'$$

与式の両辺を $-y^2$ で割ると

$$-\frac{y'}{y^2}-y^{-1}=u'-u=x$$

$$f(x)=-1 \qquad \int f(x)dx=-x \qquad r(x)=x$$

より

$$u=e^{x}\left(\int xe^{-x}dx+C\right)$$
$$=Ce^{x}-x-1$$

ここで $u=y^{-1}$ であるから

$$y=\frac{1}{Ce^{x}-x-1} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

ⅱ）　$u=y^{1-2}=y^{-1}$ とおくと

$$u'=-y^{-2}y'$$

与式の両辺を $-y^2$ で割ると

$$-\frac{y'}{y^2}-xy^{-1}=u'-xu=-x$$

$$f(x)=-x, \qquad \int f(x)dx=-\frac{1}{2}x^2 \qquad r(x)=-x$$

より

$$u=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(-\int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx+C\right)=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

ここで $u=y^{-1}$ であるから

$$y=\frac{1}{1+Ce^{\frac{1}{2}x^2}} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

ⅲ）　$u=y^{1-3}=y^{-2}$ とおくと

$$u'=-2y^{-3}y'$$

与式の両辺を $-\frac{1}{2}y^3$ で割ると

$$-2\frac{y'}{y^3}-4xy^{-2}=u'-4xu=-4x^3$$

$$f(x)=-4x \qquad \int f(x)dx=-2x^2 \qquad r(x)=-4x^3$$

より

$$u = e^{2x^2}\left(-4\int x^3 e^{-2x^2}dx + C\right)$$
$$= e^{2x^2}\left(x^2 e^{-2x^2} + \frac{e^{-2x^2}}{2} + C\right)$$
$$= Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$$

ここで $u = y^{-2}$ より

$$y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}} \qquad (C\ \text{は任意定数})$$

iv）　$u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと

$$u' = -2y^{-3}y'$$

与式の両辺を $-xy^3$ で割ると

$$-2\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{x}y^{-2} = u' + \frac{1}{x}u = \frac{\cos x}{x}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \int f(x)dx = \log|x| \qquad r(x) = \frac{\cos x}{x}$$

であるから

$$u = e^{-\log|x|}\left(\int \frac{\cos x}{x}e^{\log|x|}dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\int \cos dx + C\right) = \frac{\sin x + C}{x}$$

ここで，$u = y^{-2}$ より

$$y = \sqrt{\frac{x}{\sin x + C}} \qquad (C\ \text{は任意定数})$$

4.（1）　与式は

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{A}{L}\sin\omega t$$

となるから

$$f(t) = \frac{R}{L}, \quad r(t) = \frac{A}{L}\sin\omega t, \quad \int f(t)dt = \frac{R}{L}t$$

であり，一般解は

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt + C\right)$$

ここで

$$\int e^{\alpha t}\sin\omega t dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2}$$
$$= \frac{e^{\alpha t}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

を用いて

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t) + C\right\}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \phi_1) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$
ただし，$\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$，$C$ は任意定数

初期値より

$$I(0) = \frac{-A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\phi_1 + C = 0$$
$$C = \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\phi_1$$

したがって

$$I(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left\{\sin(\omega t - \phi_1) + e^{-\frac{R}{L}t}\sin\phi_1\right\}$$
ただし，$\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$

(2) 与式は

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{A}{L}\cos\omega t$$

となるから

$$f(t) = \frac{R}{L},\quad r(t) = \frac{A}{L}\cos\omega t,\quad \int f(t)dt = \frac{R}{L}t$$

である。一般解は，

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t + C\right)$$

ここで

$$\int e^{\alpha t}\cos\omega t dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}$$
$$= \frac{e^{\alpha t}\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\dfrac{\alpha}{\omega}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

を用いて

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{Ae^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2}(\omega L\sin\omega t + R\cos\omega t) + C\right\}$$
$$= \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t + \phi_2) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$
ただし，$\phi_2 = \arctan\dfrac{R}{\omega}L$，C は任意定数

初期値より

$$I(0) = \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\phi_2 + C = 0$$
$$C = \frac{-A}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\phi_2$$

したがって

$$I(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\{\sin(\omega t + \phi_2) - e^{-\frac{R}{L}t}\sin\phi_2\}$$

ただし $\phi_2 = \arctan\dfrac{R}{\omega L}$ である。

⑶ 与式は

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{A}{L}e^{j\omega t}$$

となるから

$$f(t) = \frac{R}{L}, \quad r(t) = \frac{A}{L}e^{j\omega t}, \quad \int f(t)dt = \frac{R}{L}t$$

であり，一般解は

$$\begin{aligned}
I(t) &= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{L}\int e^{\frac{R}{L}t + j\omega t}dt + C\right) \\
&= e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{R+j\omega L}e^{\frac{R}{L}t + j\omega t} + C\right) \\
&= \frac{A}{R+j\omega L}e^{j\omega t} + Ce^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

初期条件より

$$I(0) = \frac{A}{R+j\omega L} + C = 0$$

$$C = \frac{-A}{R+j\omega L}$$

したがって

$$I(t) = \frac{A}{R+j\omega L}(e^{j\omega t} - e^{-\frac{R}{L}t})$$

⑷ オイラーの公式

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$\frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{A}{R^2+\omega^2 L^2}(R - j\omega L)(\cos\omega t - e^{-\frac{R}{L}t} + j\sin\omega t) \\
&= \frac{A}{R^2+\omega^2 L^2}(R\cos\omega t - Re^{-\frac{R}{L}t} + \omega L\sin\omega t) + j\frac{A}{R^2+\omega^2 L^2}(R\sin\omega t \\
&\quad - \omega L\cos\omega t + \omega Le^{-\frac{R}{L}t})
\end{aligned}$$

ここで，$\phi_1 = \arctan\dfrac{\omega L}{R}$ とすると，$\sin\phi_1 = \dfrac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}$

$\phi_2 = \arctan\dfrac{R}{\omega L}$ とすると，$\sin\phi_2 = \dfrac{R}{R^2+\omega^2 L^2}$

となり $I(t)$ の実部は $E(t) = A\cos\omega t$，虚部は $E(t) = A\sin\omega t$ のときの解を与える。

5. ⑴ $x = e^t$ より

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x$$

であることに注意すれば，合成関数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=\left(\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x+x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$$

以上から

$$xy'=\frac{dy}{dt},\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

この関係を与式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+a\frac{dy}{dt}+by=0$$

すなわち

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=0$$

となる。

(2)　i）　$x=e^t$ とおくと，与式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-20y=0$$

特性方程式は

$$\lambda^2-\lambda-20=(\lambda+4)(\lambda-5)=0$$

より，異なる実解 $\lambda=-4,\ 5$ を持つ。よって一般解は

$$y(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{5t}$$

$x=e^t$ であるから

$$y(x)=\frac{C_1}{x^4}+C_2x^5 \qquad (C_1,\ C_2\text{ は任意定数})$$

ii）　$x=e^t$ とおくと，与式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+4\frac{dy}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}=0$$

となり，$\frac{dy}{dt}=Y$ とおくと

$$\frac{dY}{dt}+3Y=0$$

$$\frac{dY}{Y}=-3dt$$

したがって，$Y=C_0e^{-3t}$

これを積分して

$$y(t)=\int Y\,dt=-\frac{C_0}{3}e^{-3t}+C_2=C_1e^{-3t}+C_2 \qquad \left(C_1=-\frac{C_0}{3},\ C_2\text{ は任意定数}\right)$$

$x=e^t$ より

$$y(x)=\frac{C_1}{x^3}+C_2$$

iii）　$x=e^t$ とおくと与式は，

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+2y=0$$

となり，特性方程式は

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

となり，共役複素解 $\lambda=1\pm j$ を持つ。したがって一般解は

$$y(t)=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$$

$x=e^t$ および $t=\log|x|$ を代入して

$$y(x)=x(C_1\cos\ \log|x|+C_2\sin\ \log|x|)$$

iv）　$x=e^t$ とおくと与式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-3y=0$$

となり特性方程式は

$$\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)=0$$

で異なる実解 $\lambda=-3,1$ を持つ。したがって一般解は

$$y(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^t$$

$x=e^t$ を代入して

$$y(x)=C_1x^{-3}+C_2x=\frac{C_1}{x^3}+C_2x \qquad (C_1，C_2 \text{ は任意定数})$$

⑶　$r=e^t$ とおくと与式は

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{dv}{dt}=0$$

$\dfrac{dv}{dt}=V$ とおくと

$$\frac{dV}{dt}+V=0$$

変数を分離して

$$\frac{dV}{V}=-dt$$

よって，$V=C_1e^{-t}$

$v(t)$ は V を積分して

$$v(t)=\int V dt=-C_1e^{-t}+C_2$$

である。$r=e^t$ より

$$v(r)=C_2-\frac{C_1}{r} \qquad (C_1，C_2 \text{ は任意定数})$$

初期値より

$$v(10)=C_2-\frac{C_1}{10}=100$$

$$v(20)=C_2-\frac{C_1}{20}=0$$

したがって，$C_1=-2000$，$C_2=-100$

以上より

$$v(r)=\frac{2000}{r}-100[\mathrm{V}]$$

6. 題意より

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega_0 t$$

両辺を m で割って

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t \qquad ①$$

である。対応する同次方程式の特性方程式

$$\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0 \qquad ②$$

であり，その解は

$$\lambda=-\alpha\pm\beta,\ \ \alpha=\frac{c}{2m},\ \ \beta=\frac{1}{2m}\sqrt{c^2-4km}$$

と表される。$c\neq 0$ の場合，c^2-4km の値により，次の三つの場合に分けられる。

（i） $c^2>4km$：異なる実解 λ_1,λ_2（超過減衰）

特性方程式②は異なる実解 $\lambda_1,\lambda_2=-\alpha\pm\beta$ を持ち，対応する同次方程式の一般解は

$$x_{\mathrm{h}}(t)=C_1e^{-(\alpha-\beta)t}+C_2e^{-(\alpha+\beta)t}$$

となる。①の特殊解 $x_{\mathrm{p}}(t)$ は，未定係数法により

$$x_{\mathrm{p}}(t)=K\cos\omega_0 t+L\sin\omega_0 t$$

と置ける。この微分は

$$x_{\mathrm{p}}{}'(t)=-\omega_0K\sin\omega_0 t+\omega_0L\cos\omega_0 t$$
$$x_{\mathrm{p}}{}''(t)=-\omega_0{}^2K\cos\omega_0 t-\omega_0{}^2L\cos\omega_0 t$$

これらを①に代入すると

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{p}}{}''+\frac{c}{m}x_{\mathrm{p}}{}'+\frac{k}{m}x_{\mathrm{p}}&=-\omega_0{}^2K\cos\omega_0 t-\omega_0{}^2L\sin\omega_0 t+\frac{c\omega_0}{m}L\cos\omega_0 t-\frac{c\omega_0}{m}K\sin\omega_0 t\\&\quad+\frac{kK}{m}\cos\omega_0 t+\frac{kL}{m}\sin\omega_0 t\\&=\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t\end{aligned}$$

よって

$$-\omega_0{}^2K+\frac{c\omega_0}{m}L+\frac{kK}{m}=\frac{F_0}{m}$$
$$-\omega_0{}^2L-\frac{c\omega_0}{m}K+\frac{kL}{m}=0$$

以上から

$$K=\frac{k-m\omega_0{}^2}{c^2\omega_0{}^2+(k-m\omega_0{}^2)^2}F_0,\quad L=\frac{c\omega_0}{c^2\omega_0{}^2+(k-m\omega_0{}^2)^2}F_0$$

となる。したがって特殊解 x_{p} は

$$x_{\mathrm{p}}(t)=\frac{k-m\omega_0{}^2}{c^2\omega_0{}^2+(k-m\omega_0{}^2)^2}F_0\cos\omega_0 t+\frac{c\omega_0}{c^2\omega_0{}^2+(k-m\omega_0{}^2)^2}F_0\sin\omega_0 t$$

$$=F_0\cos(\omega_0 t-\phi) \qquad ⑤$$

ただし $\phi=\arctan\dfrac{c\omega_0}{k-m\omega_0{}^2}$

となる。以上より①の一般解は

$$x(t)=x_{\mathrm{h}}(t)+x_{\mathrm{p}}(t)$$

$$= C_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha+\beta)t} + F_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$$

（$c^2 > 4km$ の場合，α, β は③，K, L は④で与えられる。）

（ⅱ） $c^2 < 4km$ の場合（減衰振動）

特性方程式②は，共役複素解

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \omega j$$

となる。ここに

$$\omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4km - c^2}$$

である。対応する同次方程式の一般解 x_{h} は，

$$x_{\mathrm{h}}(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta)$$

ただし，$C^2 = A^2 + B^2, \tan\delta = \dfrac{B}{A}$

となる。したがって，①の一般解は

$$x = x_{\mathrm{h}} + x_{\mathrm{p}} = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta) + F_0\cos(\omega_0 t - \phi)$$

（ⅲ） $c^2 = 4km$ の場合（臨界減衰）

特性方程式②は，重解 $\lambda = -\alpha$ を持つ。このとき対応する同次方程式の一般解 x_{h} は

$$x_{\mathrm{h}}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$$

したがって①の一般解は

$$x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t} + F_0\cos(\omega_0 t - \phi)$$

①において $c = 0$ の場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t \qquad ⑥$$

となり特性方程式は

$$\lambda_2 + \frac{k}{m} = 0$$

となり，その解は

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。⑥に対応する同次方程式の一般解は

$$x_{\mathrm{h}}(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

となる。$\sqrt{\dfrac{k}{m}} \neq \omega_0$ の場合，⑥の一般解は

$$x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t)$$
$$= C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + F_0\cos(\omega_0 t - \phi)$$

である。$\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0$ の場合，⑥の特殊解 x_{p} は

$$x_{\mathrm{p}}(t) = K_1 t\cos\omega_0 t + L_1 t\sin\omega_0 t$$

と置ける。微分すると

$$x_{\mathrm{p}}{}' = K_1\cos\omega_0 t - K_1\omega_0 t\sin\omega_0 t + L_1\sin\omega_0 t + L_1\omega_0 t\cos\omega_0 t$$

$$x_p{}'' = -2K_1\omega_0 \sin\omega_0 t - K{\omega_0}^2 t\cos\omega_0 t + 2L_1\omega_0\cos\omega_0 t - L_1{\omega_0}^2 t\sin\omega_0 t$$

である。これらを⑥に代入して整理すると

$$x_p{}'' + {\omega_0}^2 x_p = -2K_1\omega_0\sin\omega_0 t + 2L_1\omega_0\cos\omega_0 t = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t$$

よって $K_1 = 0$, $L_1 = \dfrac{F_0}{2m\omega_0}$

したがって特殊解は

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\cos\omega_0 t$$

以上より，⑥の一般解は

$$\begin{aligned} x(t) = x_h(t) + x_p(t) &= C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\cos\omega_0 t \\ &= \left(C_1 + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\right)\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

7. (1)　図の左半分と右半分の閉回路にキルヒホッフの電圧の法則を適用すると

$$E_{R1} + E_C = R_1 I_1 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}(I_1(\tau) - I_2(\tau))d\tau = E$$

$$E_{R2} - E_C = R_2 I_2 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}(I_2(\tau) - I_1(\tau))d\tau = 0$$

電荷 $Q(t)$ と電流 $I(t)$ の関係

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t)$$

を用いて上式を書き直すと

$$R_1 Q_1{}' + \frac{1}{C}(Q_1 - Q_2) = E \qquad ①$$

$$R_2 Q_2{}' + \frac{1}{C}(Q_2 - Q_1) = 0 \qquad ②$$

②より

$$Q_1 = R_2 C Q_2{}' + Q_2 \qquad ③$$

t で微分して

$$Q_1{}' = R_2 C Q_2{}'' + Q_2{}' = R_2 C I_2{}' + I_2 \qquad ④$$

これらを①に代入して整理すると

$$Q_2{}'' + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}Q_2{}' = I_2{}' + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}I_2 = \frac{E}{R_1 R_2 C} \qquad ⑤$$

⑤は I_2 の 1 階微分方程式であり，変数分離法で解くことができる。

$$I_2{}' = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\left(I_2 - \frac{E}{R_1 + R_2}\right) = -30(I_2 - 4)$$

よって

$$I_2 - 4 = C_1 e^{-30t}$$

$$I_2(t) = 4 + C_1 e^{-30t} = 4 + C_1 e^{-30t}$$

初期値より $I_2(0) = 4 + C_1 = 12$ であり，よって $C_1 = 8$ であるから

$I_2(t) = 4 + 8e^{-30t}$[A]

この両辺を微分して

$I_2{}'(t) = -240e^{-30t}$

これらを④に代入して

$I_1(t) = Q_1{}'(t) = R_2 C I_2{}' + I_2 = -12e^{-30t} + 4 + 8e^{-30t} = 4 - 4e^{-30t}$[A]

⑵　図の左半分と右半分の閉回路にキルヒホッフの電圧の法則を適用すると

$$E_{R_1} + E_L = R_1 I_1 + L\left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt}\right) = E \qquad ①$$

$$E_{R_1} - E_L = R_2 I_2 + L\left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt}\right) = 0 \qquad ②$$

①より

$$I_2{}' = I_1{}' + \frac{R_1}{L} I_1 - \frac{E}{L}$$

$$I_2{}'' = I_1{}'' + \frac{R_1}{L} I_1{}'$$

これらを②の微分に代入して整理すると

$$R_2 I_2{}' + L(I_2{}'' - I_1{}'') = R_2\left(I_1{}' + \frac{R_1}{L} I_1 - \frac{E}{L}\right) + L\left(I_1{}'' + \frac{R_1}{L} I_1{}' - I_1{}''\right) = 0$$

$$I_1{}' = -\frac{R_1 + R_2}{L(R_1 + R_2)}\left(I_1 - \frac{E}{R_1}\right)$$

よって，I_1 の一般解は

$I_1(t) = \dfrac{E}{R_1} + C_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{L(R_1 + R_2)}t} = 6 + C_1 e^{-\frac{2}{3}t}$

初期値より

$I_1(0) = 6 + C_1 = 0$

よって，$C_1 = -6$

$I_1(t) = 6 - 6e^{-\frac{2}{3}t}$[A]

これを微分して

$I_1{}'(t) = 4e^{-\frac{2}{3}t}$

したがって

$$\begin{aligned} I_2{}'(t) &= 4e^{-\frac{2}{3}\pi} + 6 - 6e^{-\frac{2}{3}t} - 6 \\ &= -2e^{-\frac{2}{3}t} \end{aligned}$$

積分して

$I_2(t) = C_2 + 3e^{-\frac{2}{3}t}$

初期値より

$I_2(0) = C_2 + 3 = 0$

よって，$C_2 = -3$

$I_2(t) = -3 + 3e^{-\frac{2}{3}t}$[A]

8．シュレーディンガー方程式の変数分離解を

$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

とおく。偏微分を求めると

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx}Y(y)Z(z), \quad \psi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{d^2X(x)}{dx^2}Y(y)Z(z)$$

$$\psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = X(x)\frac{dY(y)}{dy}Z(z), \quad \psi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}Z(y)$$

$$\psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} = X(x)Y(y)\frac{dZ(z)}{dz}, \quad \psi_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz^2}$$

であるから，これらを与式に代入して

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{dX}{dx}YZ + X\frac{dY}{dy}Z + XY\frac{dZ}{dz}\right) = EXYZ$$

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} + \frac{\frac{d^2Y}{dy^2}}{Y} + \frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = -\frac{2m}{\hbar^2}E = -\frac{2m}{\hbar^2}(E_x + E_y + E_z)$$

ただし，$E_x = E_y = E_z = \frac{1}{3}E$ とする。

となり

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{2m}{3\hbar^2}E, \quad \frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{Y} = -\frac{2m}{3\hbar^2}E, \quad \frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = -\frac{2m}{3\hbar^2}E$$

であり，それぞれの一般解は

$$X = c_1 \cos\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}x + c_2 \sin\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}x$$

$$Y = c_3 \cos\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}y + c_4 \sin\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}y$$

$$Z = c_5 \cos\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}z + c_6 \sin\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}z$$

である。境界条件より

$$\psi(0, y, z) = c_1Y(y)Z(z) = 0$$

より $c_1 = 0$

$$\psi(L, y, z) = c_2 \sin\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}L \cdot Y(y)Z(z) = 0$$

より

$$\sqrt{\frac{2mE}{3\hbar^2}}L = n_x\pi \qquad (n_x = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。以上より，求める一般解は，$C = c_2c_4c_6$ として

$$\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) = C\sin\left(\frac{\pi}{L}n_x x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}n_y y\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}n_z z\right)$$

ただし $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, 4, 5\cdots$

C は波動関数の規格化条件より求めることができる。