じつきょう
数学資料 No. 73

高校数学と大学数学

学習院大学理学部数学科教授　中野史彦

1 はじめに

大学１年生に数学を教えていると,「高校までは数学が得意だったのに，大学に入ると全く分からなくなった」という人が多いのに驚かされます。

大学に進学すると，数学で扱う内容は大きく変化します。これは，中学校に進学したときの算数から数学への変化に匹敵するか，それ以上だと言えましょう。一方で，中学校から高校に進学したときにはそれほど大きな変化はないので,（受験終了の開放感の直後にいきなり訪れる）６年振りの大きな変化に適応しきれなくなるのは無理もありません。しかし，高校まで数学がトップクラスの成績であった人が，大学数学についていけずに苦労しているのを見ていると，何か対策を考えたいと思います[1)]。

この小文では，多くの数学科新入生が大学数学に苦手意識を持つ原因について考えられることをいくつか述べた上で，その改善に向けて私なりに考えたことを書いてみます。

1) 逆に，高校まで数学が苦手だった人が大学から得意になる例も数多くあります。とすると，むしろ大学数学は高校迄のものとは全く別の学問であって，名前も思い切って変えた方がいいのかも知れません。

2 原因

2.1 勉強方法

毎年５，６月は教育実習が行われる時期ですが，自分の指導している学生が中学・高校に教育実習に行き，参観指導の為にその実習校を訪問することがよくあります。訪問する度に，中学・高校の数学の授業では，教科書を通り一遍に教え込むのではなくそれを更に噛み砕いたきめ細やかな指導が行われていることに感心させられます。授業の進度も当然緩やかで，先生方の話し方は分かり易く，板書もきれいに書かれています。勉強の方法もある程度決まっており，まずは教科書の例題から始まって，例題→練習問題→章末問題→参考書・問題集→試験，と進んで行けば，自然に内容が習得できるようプログラムされています。更に塾・予備校・家庭教師・通信教育もあるわけで，まさに「手取り足取り」生徒の学習を手助けするありとあらゆる方策が揃っていると言えましょう。

一方，大学では全てが逆転します。教科書を噛み砕いて教えるどころか，そもそも大学教員は教科書通りに教えることに心理的抵抗があり，教科書にない発展的事項に重点を置く教員さえい

もくじ

ます（最近は少なくなりました）。進度は速く，週１回 90 分の授業で多くのことを詰め込まれます。分かり易く話し，きれいに板書をする教員ばかりとは限りません。昔に比べれば分かり易い教科書が増えましたが，それでも中学・高校の懇切丁寧に書かれた参考書の比ではありません。その行間は自力で補間することが求められますが，多くの新入生にとってそれは容易なことではありません。練習問題もハードルの高いものが多いですが，いきなり最初の問題から解けないと新入生がやる気と自信をなくしてしまうのも無理からぬことでしょう。

2.2 公式を適用→公式を導出

「教科書にある問題の類題はできるが，少しでもひねった問題は全く解けない」人が多く見受けられます。思うに，問題をパターンにあてはめて，公式を機械的に適用して答えを導出し，それが正解と合致していれば満足しているのではないでしょうか。おそらく，そのような人の頭の中では公式の中はブラックボックスになっており，その公式が成り立つ理由について深く考えていないものと思われます。これは，私達の身の周りに便利な電子機器が溢れており，その仕組みを知らなくても支障なく使えることと似ています。大袈裟に考えれば，全てを他人任せにして便利な生活を享受している現代人の生活スタイルとも関係があるのかもしれません。

一方の大学の数学では，公式を適用することより，いわば公式そのものの導出に重点がおかれます。計算ではなく論理的なルールに基づいて議論を組み立てて定理を証明する，それはあたかも土台から始めて小さな部品を１つ１つ積み重ねて壮大な建築物を作り上げることに似ています。ただ，実際の建築現場においては多くの人の共同作業により建設が行われていると思いますが，定理の証明においては１つ１つの細かい作業にいたるまで全て独りでやらなければなりません。

2.3 具体的→抽象的

授業中の感触では内容を学生はよく理解しているようなのに，いざ試験をすると皆殆ど０点に近いことがあります。どうも彼等は具体的な計算問題を勉強してきているのですが，筆者が定理を証明する問題を出したがために，「読みが完全に外れて」全く手が出ない状態のようなのです。

高校までの数学では計算して具体的な数値を出すのが目的であることが多く，等式変形を中心とした議論が主なものとなっています[2)]。一方，大学の数学は抽象的な議論により何かの存在や性質を証明するものが多く，また不等式による議論が多くなってきます。例えば，（微積分学で習う重要な定理の１つである）「有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は最大値を持つ」は個々の関数ではなく全ての連続関数の持つ性質に言及したものであり，一見自明に見え，何の役に立つのか自明ではありません。

高校数学で「存在」が初めて明確に出てくるのは，数学 III の平均値の定理
「$f(x)-f(y)=f'(\theta)(x-y)$ を満たす θ が存在する」ですが，筆者も高校生の頃，「存在する」というフレーズに強い違和感を感じたことを覚えています。数列や関数の「有界性」も，難しい概念ではないものの，高校数学とは異質なものであるだけに新入生によく質問されます。また高校数学ではさほど出てこない「三角不等式」が大学数学では重要な役割を果たすことも，馴染めない原因の１つかもしれません。

一方で，具体的な数値を正確に求めることにはさほど重点をおかないので，高校までケアレスミスに苦しんで来た人には大学数学は楽な１面もあると思います。

2) 弊害として，答えが正解と合っていれば安心してしまい，それ以上深く考えない人が多いように思われます。知り合いの数学者から聞いた話ですが，市井の人に「数学者は日頃何をやっているのか」と聞かれ「問題を解いている」と言ったら，「そんなの答えを見ればいいじゃないか」と言われたそうです。

3 改善に向けて

３節では，２節で述べた状況を改善するために考えられることを書いてみました。大学教員の書くことですからピントが外れた点が多いですが，何かの参考になれば幸いです。3.1, 3.2 節はそれ

ぞれ大学生，高校生の方々への提案として，3.3節は高校教員の方々へのお願いとして，それぞれ書いたものです。

3.1 大学での勉強方法

大学入学後，数学の勉強方法をどのように変えるべきかについては，色々な意見がありますが，「計算方法ではなく，証明方法を身につける」ことに重点を置いて頂きたいと思います。そのためには「定理での条件が成り立つ例，成り立たない例を考える」のが第一歩です。例えば，先程出て来た定理「有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値関数 f は最大値を持つ」は，f の定義域が有界ではない集合，または閉区間ではないような集合であるとき，または f が連続ではないとき，それぞれ反例があります。その反例を考えることは，とても良い勉強になるでしょう。

教科書にある定理の証明をただ読んでいると，疲れる上になかなか頭に入ってきません。これは教科書を読んでいるときは，そのページという空間において著者のペースに自分の思考を合わせなければならず，いわば「相手の土俵の上で相撲をとらされる」状況だからではないでしょうか。対策として，「まず教科書にある定理の証明を白い紙に丸写ししてから考える」ことが挙げられます。すると，紙の上という自前の空間上で考え，また必要に応じて言葉を補うことが自由にできます。その空間の上で時間をかけて考えた上で，自分で理解できた，と思ったら改めて何も見ずに別の紙に自分の言葉で証明を書いてみることにより，自分が何を理解し何を理解していないのか，客観的に知ることができます[3)]。時間のかかる作業ですが，数学の定理というものは知識が凝縮されてできているものですから，より深い定理ほどそれを「解凍」するのにかなりの手間がかかるのは自然なことだと思います。

自分の言葉で書いてみる，と書きましたが，別の方法として「他の人に伝える」ことも非常に効果的です。例えば，友人に立ち話の感覚で「この定理はこのようなアイデアで，このようなあらすじで証明するんだ」という具合に（細かい点を省いて）説明するのです。または，後輩に教えることも効果的です。教わる側にとっても，年の離れた教員より身近な先輩に教わった方がはるかによく身に付くようです[4)]。

最初は難しく見えた大学の数学も，一度コツを身につけてしまえばなんとかなるものです。何年か留年していても，勉強法を身につけて急に伸びる学生もいます。いわば，何かのスポーツや技能を身につけるのと同じことだと言えましょう。ただし，大学数学への順応し易さには大きく個人差があり，一般にはより偏差値の高い高校の出身者ほど早く大学の数学に馴染む傾向があります。これは，「偏差値の高い」人の方が自分を客観的に眺めて行動を軌道修正をすることに長けており，よって抽象的思考能力も発達しやすいからではないかと考えられます。

3) これは日常でもよく経験することだと思います。自分が誰かと２人で話していて，先方から何らかの情報を伝達してもらうときに，先方から一方的に言われただけで会話が終わってしまうと，よくわかった気がしない，中途半端な気持ちになることはないでしょうか。先方の話を聞き終わってから，「それはこういうことですね」と自分の言葉で言い替えたものを先方に話して確認することで，誤解は少なくなるものです。

4) 筆者の観察では，平均的な大学生にとって一番コワイ存在は部活・サークルの先輩です。先輩が「勉強しろ」と一言言うだけで，大学生の学力は格段と向上することでしょう。

3.2 高校での勉強方法

公式とのつき合い方　多くの問題がただ１つの公式にあてはめるだけで解けてしまうように，公式はとても便利なものですが，それに満足していては進歩が止まってしまいます。更に学習を深めるには，公式の導出法や成り立ちを考える，公式を疑う，などが必要ではないでしょうか。

（1）公式の導出法を考える：毎回公式を使う度にそれを自分で導出するのは良いことだと思います。授業の始まりに，先生が生徒の前でやって見せるのも良いでしょう。

（2）公式の成り立ちを考える：例として，よく使われる２次方程式の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を考えましょう。筆者も中学生の頃苦労して暗記しましたが，「なぜこのような形をしているのか」という疑問を持って欲しいと思います。この公式が２次式の平方完成

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

により導かれることから更にもう一歩考えれば，分子の $-b$ は $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ と平方完成したからであり，平方根の中の b^2 はその埋め合わせから，$4ac$ は方程式の定数項 c から来ていることがそれぞれわかるので，この公式がより自然に感じられることでしょう。

（３）公式を疑う：「５次方程式には解の公式がない」有名な事実ですが，解の公式がある筈だ，という思い込みを否定することから来ています。既存の知識を否定することに大きな進歩のチャンスがある訳ですから，公式を疑ってかかるメリットは大きいと思います。

例えば，先程出て来た平均値の定理の仮定は「f は $[a,b]$ 上連続で (a,b) 上微分可能」というものですが,「連続性は閉区間で要求されるのに微分可能性は開区間でのみ要求されるのはなぜか？」という違和感を持ったことはないでしょうか。そもそも，微分可能ならば連続であるはずなのに，なぜわざわざ連続性を仮定する必要があるのでしょう？

「f が原点近傍において，原点を除いて微分可能であり，$\lim_{x\to 0} f'(x)$ が存在するならば，f は原点でも微分可能で $f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)$ である」という重要な定理がありますが，実はその証明のキーポイントは平均値の定理を適用するのに区間の端点での微分可能性が必要ないことです。

もちろん役に立つから公式なのであって，それが間違っていることはまずないだろうとは思いますが,「公式を機械的に適用することへの漠然とした不安感」を常に持ち続けて頂きたいと思います。

異なる事項同士の関係を意識する　高校数学は，別々に習う複数の事柄の相互の関係を考えることで，より深く理解できます。以下，２つの例について述べます。

例１：有名な例ですが，再度２次方程式の解の公式を取り上げます。

（１）最初に，中学校で平方完成を用いてこの公式を習います。

（２）高校生になると，再び平方完成により，２次方程式の解の個数の判定（判別式の符号）ができます。

（３）更に平方完成により２次関数のグラフ $y=ax^2+bx+c$ を描くことができ，２次方程式の解をこのグラフの x 軸との交点と見なすことで，（２）の判定法を視覚的に理解できます。また，２次不等式も同様にグラフとして視覚的に捉えることにより，容易に理解ができます。

２次式の平方完成という１つのことを，複数の視点から見直すことで理解を深めており，更に,「２次方程式の解」→「２次関数のグラフの x 軸との交点」という具合に，学年が進むにつれ，より高い視点から既習事項を見直していることに注意すべきです。そうすれば，逆に平方完成を軸にして２次方程式の解の公式，２次関数の x 軸との交点の数，２次不等式の解など，複数の事柄を統一的に理解できるでしょう。

例２：「公式はその都度証明してから使う習慣を」と書きましたが，余弦定理を毎回座標を用いて証明するのは手間がかかるかもしれません。しかし，平面ベクトルを座標表示して $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ と成分表示すると，その内積は（余弦定理から）$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ となることさえ知っていれば，これから証明される内積の線形性を用いて

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

と余弦定理がすぐに導かれるので，この面倒な式を覚える必要はありません。

3.3 抽象化への誘導

筆者が大学に入学したとき，ある先生が「教科

書に答えが載っているのは良くない」と言っておられ，非常に驚いたことを覚えています。しかし，問題を解いた後に正解と同じなら安心してしまい，それ以上考えることを止めてしまってはいないでしょうか。それならばいっそのこと答えなどない方が良いでしょうし，むしろ答えそのものよりもそこへ至るまでの過程の方が重要ですので，その先生の言われたことは正しいと（今は）思います。

小学校の算数の主要な目的の１つは，まず加減乗除の計算法をアルゴリズムとして習熟し，数の感覚を養うことにあると思います。次に中学・高校の数学になると，文字式を通して抽象化が始まり，関数，グラフ，図形と考察の対象が増え，数学の世界の広がりを実感します。これは，いわば 18 世紀頃までの数学の状況に対応しているのではないでしょうか。しかし，楕円積分など初等関数では表現できないものの存在が明らかになるにつれ，具体化をいわば「あきらめて」抽象化・体系化の方向に進むことにより，現代数学は進展してきました。これは丁度高校数学と大学数学の転換点に対応しているように思います。生徒にも高校数学の延長を一刻も早く「あきらめて」，抽象化への新しいスタートラインに立ってもらう方法はあるでしょうか。その１つは，問題を解く際に「公式を適用して計算して数値を導出する」という作業に飽きるように仕向ける，また「具体的に数値を出すのには限界がある」というメッセージを発することではないかと思います。例えば，次の２つの級数を考えてみましょう。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1\ ,\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(1) と (2) は非常に似ていますが，(1) の値は容易に求めることができ，(2) はそうではありません。よって全ての場合について級数の値を正確に求める方法があるとはあまり期待できそうになく，一度それを「あきらめて」別の方法（つまり抽象的方法）を模索すべきです。

3.4 その他：ディスカッションの効用

同じ教科書を使い，同じ先生に習い，同じ時間だけ勉強しても成績に大きな差がつくことがあります。外からは同じことをしているように見えても，生徒の心の内面では各々かなり違う作業が行われており，それが「学力の差」と言われるものの由来ではないでしょうか。実は，たとえ同程度の成績であっても（同じ学力と見なされても），なお数学をやっているときの作業内容は人により千差万別です。それには，例えば問題の捉え方，式の立て方，式変形のやり方，計算のやり方，など様々ありますが，試験の点数にはあまり反映されないこれらのファクターは大学入学後に大きな差となって現れることがあります。

そこで，ディスカッション等を通して他人の考え方を知ることは，とても良い勉強になると思います。他人の考え方を知るとは他の解法を知るという意味ではなく，うまく言葉にはできませんが，どのような考え方をしているか，どのように発想しているか，どのようにアイデアを生み出しているか，難しい問題をいつあきらめるか，等です。数学のセンスと一言で片付けてしまいがちなこれらのことは，仲間と同じ時間・空間を共有して色々と話をしているうちに，自然と伝わっていくようです。また，同時に自分がどのような考え方をしているかを反省し，特に心の中でどのような作業をしているかを客観的に見ることができると思います。

以上，拙いながら日頃感じていることを書いてみました。読んで下さった読者の方々と，この機会を下さった関係者の方に厚くお礼申し上げます。