

続・見えないモノを観る数学の世界

—数学の世界への引率—

早稲田大学教育学研究科 東京電機大学

非常勤講師 駒野 誠

1. 環世界

環世界^{かんせかい}とは耳慣れない言葉である。それは人間を考えさせてくれる時間と空間で構成される周りの環境のことである。数学の環世界を創り出す第一歩が「とは論」である。「座標とは何か」とか「繰り返すとは何」という根本の問いの答えを探る。そのためには、学校数学を閉じた世界から開かれた世界にするための構造（72号）を認識することから始める。戦後、計算技能や定理・公式の運用など知識・技能の習熟（工学的なこと）に力点が置かれてきた感がある。職人の技や習い事は自分で獲得することが大原則で、教えてできるようになるものではないと。家とは何かを教えない大工の棟梁、野球とは何かを教えないコーチや監督、剣道とは何かを教えない師範。これらの世界はできないものは去れという自得の世界であり、「とは論」を持ち出すことは多くない。学校数学も同様に、計算さえしっかり学ばせておけば、あとは自分でやれる力が身についてくるだろうとの形式陶冶の考えでやってきたのではないだろうか。この環世界では自得ができる生徒は0.05%くらいだろう。

個々の基本計算や定理・公式については説明しやすく記述しやすい。しかし、「…とは何か。」という問いは根本的で容易に答えられないのである。しかし、それに挑戦したのが野村監督である。

Episode ア 野村克也のID野球

再生工場と言われた野村監督。楽天に移籍してきた山崎武司に、「お前にとって野球とは何か」と聞くと、天性のバッティングをしてきた山崎は考えたこともなかったで、「…」。ところが、ID野球教室というミーティングで開花し大活躍した。野村は、「1球投げては休み、また1球投

げては休み」他のスポーツにはない野球の秘密がここにあることに気付かせた。この間は、単なる休憩時間ではない。次の球種、守備隊形、…などなど、いろいろ考え準備する時間が与えられているのが野球なのだと。そのわずかな時間に考え次の行動がとれるように、日頃の頭を使った練習が肝心ということになる。

2. 学校数学のハイブリッド化

電気モーターとガソリンエンジンという2つのパワーの相乗効果によって動力性能と低燃費化の両立を実現したハイブリッドシステムのプリウスが人気である。一般に、ハイブリッドとは、「異なった要素を混ぜ合わせたもの・組み合わせたもの（雑種）」という意味である。

（1）数学+教育

学校数学は数学というガソリンエンジンだけで走ってきたようだ。AI時代突入の現在、PCの普及していない30年前と同じような内容を講義している。しかし、教育という電気モーターとのハイブリッド化が本来の学校数学の姿である。これこそ、昭和26年の学習指導要領（試案）に書かれた、「『数学を』教えるのではなく、数学で『生徒を』教育していくことであるといえよう」、に正対できると考える。

Episode イ 学校数学＝形式陶冶

数学と数学教育の関係について、宮下英明（2013）は、論文『「学校数学＝形式陶冶」論の方法—「学校数学の勉強は何のため？」の答えの探求から—』の中で、「学校教員は数学を教えられない。まず、学校数学は、＜数学を教える＞にならない。実際、数学を教えることは学校教員一般のできないことである。教員は、自分のできることを

『数学の授業』として行うことになる。教員は、自分本位で授業をつくるのみである。そしてこれは、数学の授業の『何でもあり』、学校数学の『何でもあり』に通じる。」と書いている。

まず、数学と学校数学の関係をきちんと仕分けすることが欠かせないだろう。72号を見ていただきたいが、学校数学の定義：学習指導要領に書かれた数学内容のこと、と限定して考えると、思考に役立つように意識させなければ残らないのは当然であるから、数学学習の形式陶冶説は否定されるに違いない。なぜなら、数学の定理・公式、問題演習から「数学」を自得することは無理だからである。しかし、ハイブリッド化することで、ものを観る見方が変わるのである。これまで、「教育」という龍の目をどのように入れるか迷ってきたのかもしれない。

（2）学校での学び

授業で、まず「…とは何？」で始まるテーマと、それを追求する学ぶ構えを作るのが最も重要なことである。授業が知識の切り売りになると寒々しいものになる。小手先のアクティブ・ラーニングでは創造性の基礎を培うことは難しい。「とは論」は、数学の得意・不得意によらず自己の成長を感じ取れるテーマである。「とは論」から始めれば、文系の数学、理系の数学との議論には至らない。

数学の本質をズバリ指摘した文章を紹介する：

Episode ウ 数学は問題を解く道具ではない。

苦米地英人（2016）は、『数学嫌いの人のためのすべてを可能にする数学脳の作り方』（ビジネス社）の中で、「数学は問題を解くための道具ではない。その反対に問題を見つけだすものだ。

〔中略〕数学的思考で生きるとは、誰にも見えていない問題をいち早く見つけて、いち早く解く。

〔中略〕ビジネスとはなにか？その目的はお金を儲けることではなく、他人の問題を解決してあげることだ。解決すれば、自然にお金が入ってくるようになっているのが資本主義社会なのである。」と書いている。物理や工学から見れば数学は道具であるが、数学は問題を解く道具ではないと言い切っているものに初めて出会って感動した。

この具体例を紹介しよう。：苺パック「ゆりかーご」を開発した大石産業の企業ミッションは、‘ロジスティクスに最適解を’で、「お客様のニーズをうかがい課題解決のお手伝いをしたい。それが私たちの想いです。」と Web ページにある。

学校数学は思考の役に立つものでなければならぬ。学校数学という狭い範囲の数学という材料を用いているが、そこに教育という電気モーターを作動させることで数学が何を語っているのかを説明する場面が可能になると考える。

Episode エ 「職場で数学は役に立っていない」

『WORKPLACE MATHS DOESN'T ADD UP』という論文がオーストラリアで出たのは2014年12月14日である。Ian Chubb 教授は、「もっと社会で役に立つような数学を教える必要がある」とコメントしているが、数学は工学や経済とは異なるので誤解されやすい発言だ。役に立つのは、本物の思考で、一般人に公式や定理が役に立つことはない。かつて教育課程審議会会長の三浦朱門氏の発言によって、2次方程式の解の公式を中学から高校へと移行したことがあったのは記憶に残っている。奥方の曾野綾子氏が、「2次方程式もろくにできないけど、65歳になる今日まで全然不自由しなかった」と言ったのが発端らしい。有益かどうかの問題を、数学の話をもってしてその価値を説得しても効果はない。学校も同じで、数学の苦手な生徒にも、得意な生徒にも、2次の多項式を学ぶ理由を説明できないことは恥ずかしい。数学と教育のハイブリッドなくして中等教育科目としては不成立である。ここでいう教育というのが、心理学、社会学、教育学のことではない。数学のねらいを、式ではない日本語の言葉で語ることである。

（3）学ぶとは別人になること

Episode オ 甲野善紀、内田樹の対話

「身体を通して時代を読む 一武術的立場」（2006）の中で、内田樹の「学ぶ前と後では別人になっている」のが学びである。というフレーズに衝撃を受けた。知識・技能を教えてもらう前と教えてもらった後では、買い物をする前後と同様

に別人になるはずがない。「とは論」が、オーセンティック authentic（真正の・本物の）な問いである。「野球とは」の解答を見つけた楽天の山崎選手は別人になり、パ・リーグでもホームラン王を獲得したのである。

（４）数学的な考え方と数学（固有）の考え方

Episode 力 数学的な考え

松原元一（1990）は『数学的見方 考え方』（国土社）の中で、「近代の論議では、『数学的考え』の特色を説明して、抽象化、統一化、発展的に考える、単純化、同一化等々の多くの言葉が並べられている。お粗末も甚しい。これらの言葉を『数学的考え』の説明とせずに、『物理学的考え』、『経済学的考え』等々のあらゆる広義の科学的考えの説明としてもそのまま通用する』と記している。授業で教えたいのは、これらの数学的な考え方が本質ではない。

（５）中心概念

島田茂は、『Mathematical in General Education』（1938）の訳を教材等調査研究会中学校高等学校数学小委員会で紹介した。そこでは、中心概念をすえて、指導項目だけでなく、そこで配慮すべき事柄を本気で考え出された。

『高等学校学習指導要領数学科編昭和 31 年度改訂版の作成過程とその後：戦後の高等学校数学科の教育課程の確立』（長崎栄三 2013）から引用すると、「中心概念を明らかにすることは、問題解決の為の道具として考えただけではなく、可能な応用とは切りはなして、純粋な科学として考えた数学と教育を統一していくのに役立つ。その概念の数は、いつも頭においておけるくらいの少数のものでなければならない。また、その概念は、いくつもの性質の異った問題に、体系的に**なんども現れてくる**ようなものでなければならない。〔中略〕数学的な取扱が必要な問題にも必要でない問題にもその解決には重要な考え方となるものである。」

日常では、どのように本質に至るのか紹介しよう。

Episode キ カンブリア宮殿（2016.5.5）人気の「新江の島水族館」

飼育員にはサイエンスの知識を徹底的に持ってもらう。それをお客にどう伝えるのかがアート担当で、飼育員からサイエンスを引き出し、お客に伝わるように変換し、最終的に展示する。この一連の流れの中で、飼育員もサイエンスだけではダメとわかり、アート方向のアイデアを出すようになる。伝えたいことは、「違う世界の生き物をよく見たらすごく面白い。」ということである。

< Coffee Break >

菊池寛曰く、「幾何の時間に習って役に立ったことは、三角形の二辺の長さの和は残りの辺の長さより長いということである、しかしこんなことは犬や猫も知っている。」

そこで、菊池寛への授業提案： $\sqrt{3} = 1.7320508$ と近似し、 30° 、 60° の直角三角形の土地で、斜めに進むのは、直角回りの何%で行けるのか計算してみよう。式は、 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

これを、 $2 \div 2.7320508$ と筆算したとき、そこで、有理化を学べば 73.20508% と即答できる数学の世界に引率する。

これをすべての直角三角形で調

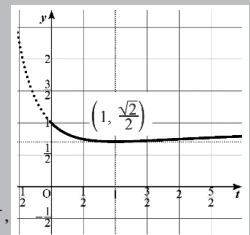
べる：3 辺の長さが a 、 b 、

$\sqrt{a^2+b^2}$ のとき、ユークリッド

距離とマンハッタン距離の比は

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$ 。ここで、 $t = \frac{b}{a}$ とおき、

1 変数化した $f(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$ より、最小値は、 $1:1:\sqrt{2}$



Episode ク 「教えることは 2 倍学ぶことである」

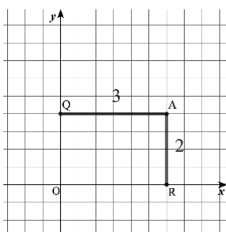
ジョセフ・ジュベール（1754～1824）の名言である。ティーチングとコーチングとアクティブ・ラーニングの関係でもある。教師のティーチングという学習者への Give から、コーチングによる学習者本人が Get することへのパラダイムシフトがアクティブ・ラーニングである。Peer Learning（共に学び、高め合う）することが日常であると学習が面白くなる。

定理・公式の知識の増加量だけでは生徒は感動しない。別人にならないからである。生徒だけでは気付かない世界を見せることが教育である。

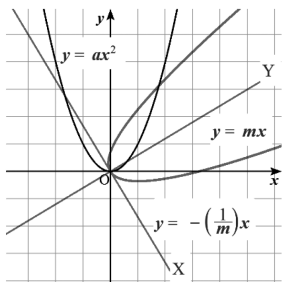
3. 数学の世界への引率例

(1) 「座標系とは何か」

一般の座標系の作り方が重要であるが、ここでは、正規直交座標系の作成法を示す。：原点 O を定め、 O を通る直交する2本のラインを引く。それらを軸と呼び、それらのライン上に単位のメモリ1を打つ。このとき、図の平面上の点 A とは、 y 軸までの最短距離3の $x=3$ という直線と、 x 軸までの最短距離2の $y=2$ という直線との交点であるという



のが座標の定義である。 $A(3, 2)$ と表現し A の座標という、軸上に便宜的に印した3と2は、軸からの距離を意識させておらず、教育的ではない指導である。点の決定には漁師の「山立て」法がある。



格言「点は交差なり」。座標の本質を理解していれば、 X, Y を軸に持つ、 $y=ax^2$ に合同な放物線 $Y=aX^2$ を x, y で表現できる。

(2) なぜ2次方程式を学ぶのか

‘教育’ という電気モーターの場面を紹介する。1次関数の線形性はモノゴトの基本であるが、線形でないものもたくさんある。人間の脳は線形で処理したがるので、危険に出会うこともあり、絶対に2次を学ぶ必要がある。自由落下するときの時間と距離の関係、走行速度と停止までの距離の関係、正方形の部屋の1辺の長さとの面積の関係、パラボラアンテナや水たまりの曲線など、曲がったものは2次で近似する。さらに、2乗したら負になる世界との出会いが待っている。

中学では2次に比例する関数として、 $y=ax^2$ のグラフを学習する。2次の一般形を平方完成から始めると困難であるのに、中学で「2次方程式の解の公式」を指導するのは問題がある。解の公式の暗記は工学的学習である。ここでは、‘仲間’ という同値律をキーワードに指導する教育的提案

である。()内は、数学ではない比喩の言葉である。 $y=ax^2$ (日本) …①と合同なグラフ $Y=aX^2$ (米国) …② を描き、座標変換 (日米円ドル変換)

$$\begin{cases} X=x-p \\ Y=y-q \end{cases} \quad (\text{日本の目盛で、アメリカの距離 } X, Y \text{ を測る})$$

によって、②は、 $y-q=a(x-p)^2$ …③

下図は、 $a>0, p>0, q<0$ の場合で、

①≡②, ②≡③ゆえに、③≡①。③を展開整理すると、 $y=ax^2-2apx+ap^2+q$ …④

p, q が変化すると、 $y=ax^2+bx+c$ …⑤の形

で、⑤≡①である。④と⑤の係数を比較すると、

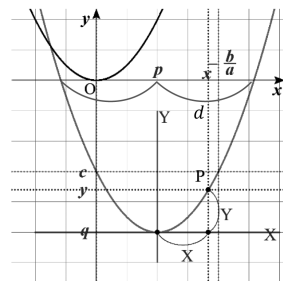
$$-2ap=b,$$

$$ap^2+q=c$$

これより、

$$p=-\frac{b}{2a},$$

$$q=c-ap^2=c-\frac{b^2}{4a}$$



③は、 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ これが0となる x を求める計算へと向かわず、⑤の x 軸との交点の値は、

$y=ax^2+bx+c$ と $y=c$ との連立から、

$$p=-\frac{b}{2a} \text{ とわかり、頂点の } x \text{ 座標も⑤に代入する}$$

のではなく、合同な②(①)を使えば、

$$c-a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad (\text{図では負}) \text{ とわかる。}$$

再度②(①)を活用することで軸とのずれ d は、 $ad^2=\frac{b^2-4ac}{4a} (b^2-4ac>0)$ から、 $d=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\text{よって、⑤の解は、} x=p\pm d=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

さらに、④に含まれる $y=-2apx+ap^2+q$ は、

y 切片での接線であることも容易にわかる。

以上から、⑤のグラフの概形が初めからわかる。

日本と米国に3辺相等の合同三角形がある。米国にある三角形の内角を知るための渡米は不要で、日本の三角形でわかる。未知な⑤を知るのに必要なことは、合同で既知な②(①)という仲間(相棒)との2つの世界を結ぶ座標系変換(＄と¥)の関係が本質の学び(教育)である。