# 新課程入試における「整数の性質」・「複素数平面」の出題について

「高校数学・新課程を考える会」事務局長／予備校講師　大淵智勝

### 1. はじめに

平成 28 年度(2016 年度)の数学の大学入試においては,「旧課程移行措置」がなくなることから，すでに 2015 年度から始まっている新課程の範囲から本格的に出題されることが考えられた。現に，私立大学の個別入試や国公立大学の 2 次試験では旧課程にはなかった新課程の範囲の問題が多く出題された。

今回は 2016 年度のセンター試験の問題と得点率，また，私立大学の個別入試と国公立大学の 2 次試験の問題を元に，数学 A の「整数の性質」と数学 III の「複素数平面」について考えていく。

### 2. センター試験・数学 IA における「整数の性質」の出題と正答率について

まずは，受験生全体における整数問題についての様子を考えるために，2016 年度センター試験(本試験)での数学 IA 第 4 問について見てみる。

| 小問 | 出題内容 | 正答率 |
|---|---|---|
| (1) | $92x+197y=1$ の $x$ の絶対値が最小の整数解 | $x$ : 53.4%<br>$y$ : 56.0% |
| | $92x+197y=10$ の $x$ の絶対値が最小の整数解 | $x$ : 17.3%<br>$y$ : 19.0% |
| (2) | 2 進法で 11011 のものの 4 進法での表記 | 51.2% |
| | 6 つの 6 進法の小数から 10 進法で有限小数となる 3 個を選ぶ | 32.3% |

表 1　2016 年度センター試験(本試験)数学 IA・第 4 問正答率(第 4 問全体での得点率 40.1%)

(大学入試センター発表)

(1) では,「197=92×2+13」と「92=13×7+1」を用いることで，$92x+197y=1$ の 1 つの解として，$(x, y)=(15, -7)$ が求まり，そこから一般解が出る。また，$92x+197y=10$ については最初の方程式の解から，$(x, y)=(150, -70)$ が 1 つの解であることが求まり，そこから一般解が出る。これらをふまえて，このそれぞれの方程式について,「$x$ の絶対値が最小となる整数解」を求めることとなるのだが，最初の式の解からして正答率が低く，また，2 つ目の方程式の解に至っては，正答率が 2 割にも満たない。

1 次不定方程式の解の導出については一般解を求めることについても教科書でも扱っていることであるが，その中の「$x$ の絶対値が最小のもの」を見つけていくという作業がどのようなことなのかに思いが至らなかった受験生が多かったのではないだろうか。これは，受験生が「解き方」は知っているが，それによって求まった一般解がどういう意味のものなのかの理解が不足していることにより起こったことではないかと考えられる。この辺りについては，教科書にある 1 次不定方程式を用いた応用問題などを通じて「一般解を求め，その後，問題文で要求されている値を求める」ということをしていれば本来なら落とすことない問題だと思われる。

(2) は $n$ 進法についての問題であるが，こちらも正答率が低い。2 進法から 4 進法にする問題については，2 進法表記されたものの下から 2 桁ずつで区切って考えれば答えは早く出るが，10 進法に直してからという生徒も多かったのではないだろうか。また，後半については「小数の $n$ 進法」の理解がそもそもないと解くこともできないので，それもあって正答率が低かったということも考えられる。

「センター試験は基礎がしっかりできていれば 7 割は余裕で取れる」という人も多いが，実際には単に解き方を覚えているだけでは 7 割を取れ

るようにはならない。もちろん，典型的な問題というものは存在し，上記のように１次不定方程式の「解き方」といったものもあるが，その「どうしてそのように解いているのか」といったことや「そもそも何を求めているのか」ということの理解がないようでは，７割以上の点数を取るのは難しい。

ある新聞での大学生の投稿で「センター試験の勉強はひたすら知識を詰め込む作業だった。」「記憶力のみが問われているように感じる。」というのがあった。しかし，センター試験は「記憶力のみで何とかしようとする」という勉強法では，それ相応の低い点数しか出ないようになっている。上記の第４問の各問の正答率を見ればよくわかると思われる。

### 3. 私立大の個別試験，国公立大の２次試験での「整数の性質」の出題について

旧課程の中でも，東大，京大，一橋大等といった大学では整数に関連した問題はすでに多く出題されていた。ただ旧課程まででは「整数」は高校数学の分野として，明確な場所があったわけではなく，高校までの数学で散見していた整数に関する話題を組み合わせていた感がある。一方，新課程においては数学Ａに「整数の性質」という分野が独立してできたので，大学側としても出題しやすくなったのではないだろうか。現に今年の入試においては整数の出題はそれ以前に比べて多いように見受けられる。

数学Ａの「整数の性質」の分野で扱われているものは大きく分けると「倍数・約数・剰余」「ユークリッド互除法と１次不定方程式」「$n$ 進法」の３つであるが，今年の大学入試での整数問題で特徴的なのは，「$n$ 進法」に関連した問題が多いことである。具体的には，東大理系の第５問は小数の10 進法に関連した問題であり，京大文系の$\boxed{3}$は $n$ 進法で表された等式についての問題（右段参照）であった。

一方，従来から出題されているような整数問題も多く，京大理系の$\boxed{2}$は「2 つの素数 $p$，$q$ を用いて $p^q+q^p$ と表される素数をすべて求める」という問題，東工大の$\boxed{4}$は「$n$ に素数などの条件が付いたときに $(n-1)!$ が $n$ で割り切れるかどうか」についての問題，一橋大の$\boxed{1}$は「 $6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 $x$ をすべて求める」という問題であった。

なお，これまでもそうであるが，今年のセンター試験での出題のような「教科書通りのこと」を理解していればよい問題でない限り，「整数問題」は「難問」として扱われる傾向がある。これは，「整数問題」というのが「整数の性質」を利用した上で論理的に正答を得ていけるかを問われることが多いことにある。つまり，「『整数』であるために」，あるいは，「『○の倍数』であるために」，といったところから求めるべき未知数を必要条件から絞り込むことなどができるといった手法で，問題を解決することが多いからである。

京大文系の$\boxed{3}$でそのことについて具体的に考えてみる。

| |
|---|
| $n$ を４以上の自然数とする．数 2，12，1331 がすべて $n$ 進法で表記されているとして，<br>$2^{12}=1331$<br>が成り立っている．このとき $n$ はいくつか．十進法で答えよ． |

2，12，1331 がいずれも $n$ 進法で表記されているということからすれば，これを $n$ の式で表せば，それぞれ，2，$n+2$，$n^3+3n^2+3n+1$であるから，等式が成り立っているとき，

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1$$

より，

$$2^{n+2}=(n+1)^3$$

となる。両辺とも整数であり，左辺が２のべき乗であるので，右辺の底である $n+1$ も２のべき乗となる必要があり，これを $n+1=2^k$ とでも置けば，

$$2^{2^k+1}=2^{3k}$$

となる。これより，$2^k+1=3k$ を満たす自然数 $k$ を考えればよいこととなる。

このように問題を整理し，数式を立てて「整数」であるがゆえの「倍数・約数」などといった性質から引き出される必要条件を並べていくこと

で整数問題は答えの方向性が決まってくる。このような「問題について考えていく」ということが普段からなされていれば，上記のような考えに思い至るのだろうが，数学の学習が「解き方をとにかく覚える」という方向になってしまっている場合，このような問題ですら解くことができないことになるのだろう。

## 4.「複素数平面」の出題について

旧々課程では数学Bにあった複素数平面であるが，新課程では数学 III の分野となったこともあり，出題される大学は理系の大学・学部に限られることとなった。しかし，旧課程移行措置がなくなった 2016 年度の大学入試では，複素数平面を題材とした出題がかなり多く見受けられた。

複素数平面について図形的な性質を利用する問題としては，東大理系の第 4 問が挙げられる。

> $z$ を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような $z$ の範囲を求め，図示せよ。

この問題については，A，B，C が三角形の 3 頂点となることから，$z^2 \neq 1$ すなわち $z \neq \pm 1$ であり，三角形 ABC が鋭角三角形となることから，

$$\frac{z^2-1}{z-1},\quad \frac{z^2-z}{1-z},\quad \frac{z-z^2}{1-z^2}$$

の偏角がすべて -90° から 90° の間に入ることが条件となる。これは，この 3 つの値のすべての実部が正であることと同値であるから，複素数 $\alpha$ の実部が $\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ であることを用いることで $z$ の条件を求めることができる。

<東大理系第 4 問略解>

A，B，C が三角形の 3 頂点となるので，

$$z \neq 1 \quad \text{かつ} \quad z^2 \neq 1$$

より，$z \neq \pm 1$ である。

三角形 ABC が鋭角三角形となるとき，

$$\frac{z^2-1}{z-1},\quad \frac{z^2-z}{1-z},\quad \frac{z-z^2}{1-z^2}$$

の偏角が $-\dfrac{\pi}{2}$ より大で $\dfrac{\pi}{2}$ より小となるから，これら 3 つの値，すなわち，

$$z+1,\quad -z,\quad \frac{z}{1+z}$$

の実部が正となる。

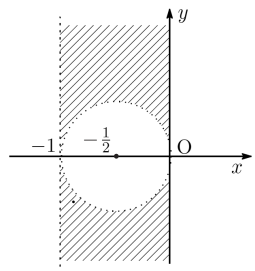
よって，

$$(z+1)+\overline{(z+1)}>0$$
$$(-z)+\overline{(-z)}>0$$
$$\frac{z}{1+z}+\overline{\left(\frac{z}{1+z}\right)}>0$$

より，

$$-1<\frac{z+\overline{z}}{2}<0 \text{ かつ } \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$$

となるので，求める $z$ の範囲は図のようになる。（境界除く）




様々な数学の問題において，「問題文にある条件」をいかに数式化するか，ということがポイントとなるが，この問題においては，複素数平面とベクトルとの対応，複素数の積と複素数平面での回転拡大などといった複素数平面上での性質を理解していれば，三角形 ABC が鋭角三角形となる条件を上記のように数式化することは容易であると思われる。

なお，今年の東大の問題は上記の問題をはじめとし，比較的解きやすい問題が多かった。そのため，普段から「考えて数学を解く」ということをしている受験生にとっては高得点が取れ，逆に「数学は暗記科目」となっていた受験生にはまったく点が取れないこととなり，この差が大きく合否に影響したと考えられる。例年に比べて，高校によっては東大の合格者数の動向が大きく異なることとなってしまったのは，ここに大きな要因があると考えられる。「東大へ行くにも，数学はと

にかく解き方を覚えるんだ」という指導をされた受験生にとっては悲劇的な結果が訪れてしまったのではないだろうか。

また，複素数平面の分野で登場するド・モアブルの定理を用いる問題としては，千葉大の$\boxed{9}$が挙げられる。

> $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ ($i$ は虚数単位) とおく。
> (1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$を求めよ。
> (2) $\alpha=z+z^2+z^4$とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および $\alpha$ を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は $\alpha$ の共役複素数である。
> (3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

ド・モアブルの定理より， $z^7=1$ であるから，これと $z\neq1$であることから，(1) はすぐに－１と求まる。

(2) は　$z^7=z^1z^6=z^2z^5=z^3z^4=1$

から， $\overline{z^1}=z^6$，$\overline{z^2}=z^5$，$\overline{z^4}=z^3$であるので，

$$\begin{aligned}\alpha+\overline{\alpha}&=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1\\ \alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\ &=3z^7+z^6+z^4+z^8+z^5+z^{10}+z^9\\ &=3+z^6+z^4+z^1+z^5+z^3+z^2\\ &=3-1=2\end{aligned}$$

と求められる。

(3) は

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0\cdots①$$

の６つの解が $x=z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6$であるから，①式の左辺は

$$(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

と因数分解できることから，

$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ の値は①式の左辺に $x=1$を代入した７となる。

この問題のように，複素数平面を直接使わないが，複素数平面の分野で扱う事柄を利用した方程式の解についての問題などは，今年も多く出ており，これからも多く出題されるように思われる。

## 5. 最後に

旧課程移行措置の「しばり」がなくなった以上，これから先も「整数の性質」や「複素数平面」の問題は他の分野と同程度に出題されるようになると考えられる。また，整数の性質については $n$ 進法や剰余類に関連した，教科書に載っている内容についての問題も多く出されることが考えられる。

いずれにしても，これらの分野を含め，数学の入試問題を解けるようにしていくためには「基本的な事柄の丁寧な理解」の上で，それらの道具が「どのように使えるのか」といったことを理解していき，そして，実際の問題について「時間をかけてでも丁寧に考えていく」ということをしていくことで，レベルの高い大学入試問題にも対応をしていくことが可能であろうと考える。

いつ頃からか，数学が「暗記科目」になってしまいすぎているように思える。確かに，覚えなくてはならない部分もあることはあるが,「暗記」に特化した数学ではセンター試験を含めた大学入試問題には対応しきれない。また,「数学は覚えることの他に，考えることが大切なんだ」と気付いた生徒とそうでない生徒との差にさらに大きな学力差が生まれ，結果として，数学で決まってしまう入試の際には合否に直接の大きな影響が出てしまう。そのようにならないためにも，生徒に「しっかりとした理解」をさせていく必要がある。

今回の分野では，整数の性質では「論理」の側面を，複素数平面では「ベクトルを絡めた図形の話と数式化」といった側面を考えさせることができる。この辺りをしっかりと考えさせることで，よりいっそう生徒の数学に対する理解を深めさせることが可能なのではないだろうか。