元海城中学校高等学校　大和澄夫先生の
ワンポイント教材②

対数的な感覚

対数は乗法計算の簡便法として考え出されました。これを具体化した器具に計算尺とよばれるものがありました。計算尺については，かつて中学校で学びましたが，現在は電卓やコンピュータを用いるため，高校までに学ぶ数学や理科で積の簡便化のために対数を応用することはほとんどなくなりました。では，なぜ対数を学ぶのかという疑問が浮かびます。その回答としては不満足かもしれませんが，我々の視覚，聴覚，知覚が対数的であるという話をします。

フェヒナーの法則

聞き慣れない言葉ですが心理学のなかに精神物理学という分野があります。外的な刺激の大きさの違いを，人間がどのような程度に感じるかを扱う分野です。百年ほど前ですが次のフェヒナーの法則が発見されました。

感覚の大きさは
刺激強度の大きさの対数に比例する

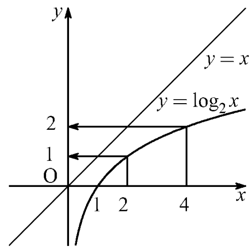
これを対数で表しておくと次のようになります。

感覚の大きさ = 定数 × $\log_e$ 刺激強度の大きさ

e は数学Ⅲで学ぶ自然対数の底です。刺激（褒めたり，怒ったり）を与える人の刺激度の大きさに対する受け取り側の人（褒められたり，怒られたり）の感じ方の大きさを表します。褒められたり，怒られたりしたとき，刺激の量が 1 から 10 に増えた場合と，10 から 100 に増えた場合が同じと感ずるということです。おだてられたり賄賂を受ける人の心の慣れを表現しているようです。

次は 1 次関数 $y=x$ と，底が e ではありませんが対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフです。

この場合，対数関数のグラフは増加はしている



ものの直線 $y=x$ より緩やかです。 $y=\log_2 x$ の x が 1 から 2 に変化したときと，2 から 4 に変化したときの y の変化は

$$\log_2 2-\log_2 1=1\ ,\ \log_2 4-\log_2 2=1$$

で同じになっています。もう少し数学的に表現すると，対数関数の底 a が 1 より大きいとき，変数 x の値が大きくなるにつれて関数の値 y の変化の割合（平均変化率）は小さくなっていきます。この感じを極限を使って式で表してみると

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x\log_e a}=f'(x)$$

つまり，$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ であり，底が 1 より大きい対数関数の変化率（微分係数）は x の値が大きくなると 0 に限りなく近づきます。人間の感覚 (y) は過度の刺激 (x) を和らげるように設定されているようです。

音の感じ方

他に感覚の代表として音の聞こえ方について載せておきます。物理の範囲になりますが，音響にはデシベルという単位があり，デシベルでの目盛りが 2 倍異なる音は，エネルギーが 10 倍異なります。つまり，実際の音のエネルギーと人間が感ずる音の大きさには，音のエネルギーが 10 倍になるとき人は音の大きさを 2 倍に感ずるという関係があります。ここにも，過度の刺激を対数的に感じるという特徴が観察されています。人間が感ずる音の大きさを V，音のエネルギーを E とすると，この関係は $\log_2 V=\log_{10} E$ と表されます。$E'=10E$ のとき $V'=2V$ となることを証明してみてください。

通巻第 73 号　©編修·発行　実教出版株式会社　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町 5
2016年　9月 20日　印刷　TEL. 03-3238-7777
2016年　9月 26日　発行　代表者　戸塚雄弐　http://www.jikkyo.co.jp/