じつきょう
数学資料 No. 72

ふだんの講義より

香川大学教育学部教授　内藤浩忠

1. はじめに

現在の職場に勤務してから，早いもので 30 年になる。教育学部なので，教員の養成が主たる目的であることは誰でもわかるが，着任前には高等学校の数学教員を養成しているところであると，勝手に思っていた。実際には中学校や小学校の教員になる学生が多いわけである。当初は，中学校・高等学校の教員免許のための科目を担当していたが，定員削減に伴い，10 年ほど前から小学校の教員免許のための科目を担当することになった。今回はその経験をもとに教材を紹介してみようと思う。算数を題材にしているが，深い数学にもつながっている内容なので，教員免許状更新講習で高等学校の先生方にも紹介しているものである。

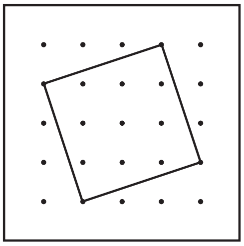
小学校の免許を取る学生の専攻はさまざまである。当然のことながら，いわゆる文系の学生が多く，彼らは数学に苦手意識を持っている。「小学校の算数まではできたが，数学になってからはわからなくなった。」という体験も多い半面,「算数は教えやすい科目である。」という意見も多く聞く。教えやすいということと試験の採点がしやすいということを，混同しているのではないかと想像している。指導する場合には児童の間違いの原因を探って指摘修正する必要があるわけだが，それは教科によらず難しいことと思う。また,「算数」は易しいが「数学」は難しい，と思っている学生も多く，そのような生徒を高校時代に指導した経験をお持ちの先生方も多いと思う。講義で面積の単元を扱うときに，念のため平行四辺形の面積の公式の導き方を説明してみた。こんな当たり前のことを扱っては，学生が退屈するかもしれないという不安な気持ちを持って説明した。ところが，感想を書かせると,「算数は公式を覚えて数字を当てはめて答えを出すものと思っていたが，公式ってちゃんと説明できるということに感動しました。」というものがあった。それからは一生懸命説明しなくてはいけないと思いながら，講義をしている。このような学生は，高等学校ではひたすら解法を暗記して問題に取り組んでいて，定理や公式の関連や，それらを適用できる根拠などを考えもしなかったのではないかと想像する。

2. 図形板を使って

小中学校で使える教具として,「図形板」というものがある。板に釘を次ページの図のように格子

もくじ

状に打ったものであるが，その釘に輪ゴムを引っ掛けて使うものである。



講義では，この図形板に輪ゴムを掛けてできる正方形に注目させ，何種類の正方形ができるかを見つけさせている。斜めに置かれた正方形を発見できるかが大きなポイントである。それぞれの正方形がいくつあるかを探すことも楽しい作業となるであろう。8 種類の正方形があるわけだが，「自分はこれしか見つけられない。」ということと，「どうやってもこれしか見つからない。」ということの違いを喚起するように努めている。

次にそれぞれの正方形の面積を求めさせてみると，多くの学生は三平方の定理を使って導く。小学生にもわかるようにできるかと問いかけてみると，けっこう戸惑っている様子である。小学生ならば，斜めに置かれた正方形を取り囲む大きな正方形を考えて，周りにある合同な 4 つの三角形の面積を引くことを考えるはずである。

この考え方は，三平方の定理の証明のひとつと同じ考え方である。小学生の発想にも中学校の予習となるものがあるわけである。

この図形板上に実現される正方形の面積は，それぞれ 1,2,4,5,8,9,10,16 である。図形板を大きくすれば，13 も現れる。格子状の点が無限に広がっている様子を想像して考えるのである。次に，このような無限に広い格子点を結んでできる正方形の面積として出てくる数の性質を考えてみる。講義では 2 つの性質に着目している。

1 つ目は，出てくる数が，4 を法としては，3 に合同にならないことである。2 つ目は，正方形の面積として出てくる数同士を掛けたものも，面積として出てくることである。

先ほどの図に出てくる直角三角形の直角をはさむ辺を a，b とすれば，正方形の面積は a^2+b^2 となる。まっすぐに置かれた正方形は片方が 0 だと思えばよい。

1 つ目の説明をする。

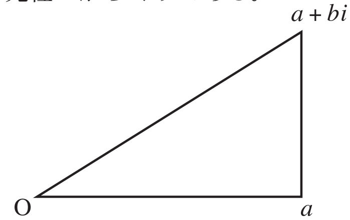
a が偶数ならば，$a^2 \equiv 0 \pmod 4$ となり，奇数ならば，$a^2 \equiv 1 \pmod 4$ となる (この場合は mod 8 でも成り立つ。)。a，b の偶奇をどのように組み合わせても 3 にならないわけである。

次に 2 つ目の説明をする。それぞれの面積を a^2+b^2，c^2+d^2 として，その積を計算してみるわけである。

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \\ &= a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2 \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2\end{aligned}$$

という変形をしてみれば，2 つの整数の平方の和になっているわけなので，正方形の面積としてあらわれる数である。この変形はとても技巧的で，なぜ $2adbc$ という項が見えるのかはわからない。このような変形を見て感動して数学が好きになる者もいれば，とても思いつかないと思って苦手意識を持つ者もいるのであろう。種明かしをすれば，裏に複素数が顔を出しているのである。先程の直角三角形の直角でない頂点を原点に置き，直角の頂点を実軸上に置けば，残りの頂点は $a+bi$ と見ることができる。その点と原点を結んだ線分を 1 辺とする正方形の面積が $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ となっているわけである。そして

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ となっていることが先程のからくりである。



まだプロジェクターがなかった頃，OHP シート 3 枚に，$a+bi$，$c+di$，$(ac-bd)+(ad+bc)i$ の上図の三角形をそれぞれ書いておき，$a+bi$ のシートの上に $c+di$ のシートを載せてからこのシートの実軸を下のシートの斜辺に合わせるように回転すると，その斜辺の位置が，$(ac-bd)+(ad+bc)i$

の斜辺に重なる様子を見せたことがある。これは，複素数のかけ算を極形式によって説明したものになっている。

複素数による説明と書いたが，もう少し詳しく言うと，ガウスの整数環とよばれる，$i=\sqrt{-1}$ を有理数体に添加した二次体の整数環

$$\mathrm{Z}[i]=\{\, a+bi \mid a,\ b \text{ は整数} \,\}$$

の性質を使えば，どのような整数が図形板上にできる正方形の面積になるかがわかる。答えは，その整数を素因数分解したときに，出てくる素数のうち，4 で割ったときの余りが 3 になるような素数が偶数べきであるものが，面積としてあらわれる数である。この証明には，二次体の整数論が使われている。同じ面積を持つ正方形の置き方が何種類あるかもわかる。実例をあげると，面積が 65 となる正方形は，$4+7i=(2+i)(3+2i)$ という置き方と，$8+i=(2-i)(3+2i)$ という置き方があるが，面積 5 や 13 のものは本質的には 1 通りしかない。($\pm 2\pm i$ はすべて対称になっており，$\pm 1\pm 2i$ は，その $90°$ の回転になっている。線対称，点対称と $90°$ の回転を同じものと見ているわけである。)

詳しい話は省略するが，高木貞治『初等整数論講義』(共立出版) などを参照していただければ幸いである。大げさにいえば，二次体の整数論は類体論の簡単な例と見ることもでき，なかなか奥の深いものである。大学院で学ぶ人も多いと思われる。

この教材は，小学生も楽しめるものであるが，実際はかなり深い理論を映しだしているものなのである。算数もかなり深いところまで発展していく科目であることを学生に実感してほしいと思っている。

3. 数の計算

小学校では，「数と計算」という分野では，計算の指導が中心である。あまりにも慣れてしまっていて，日常的な計算で困る人はいないと思う。しかし，あらためてその計算法が正しいと言える根拠を自問してみれば，それほど自明ではないことに気がつく。筆者自身もどの段階で解決したのか記憶はない。小学生のころは「こうやれば計算できるのですよ。」と言われるがままに信じていたように思う。小数の掛け算で，答えの小数点をどこに打つかなどは，何も考えずに言われた通りにしていただけだったような気がする。

小学校の科目を担当することになって，自分自身小学校時代には教え込まれていた部分が多く，ちゃんとはわかっていなかったと反省させられることが多い。

計算においては，学生は十分理解したつもりになっており，計算原理の難しさを感じていないと思ったので，3 進法を解説してみた。計算の過程における桁あがりは，小学生が初めて学ぶときには難しいものなので，その難しさを 3 進法を体験することによって実感してもらうというねらいである。最初は整数の四則演算から入るわけだが，小数，分数と進んでいきながら，いろいろな計算法の原理について問いかけをしてみている。計算を仕込まれただけと思われる学生も多く，その理由を考えようとする態度を見せてくれるのがうれしい。「小学生に 3 進法を教えなくてはいけないのですか？」などと，こちらの意図を理解していない質問を受けて苦笑いをしたこともあるが。

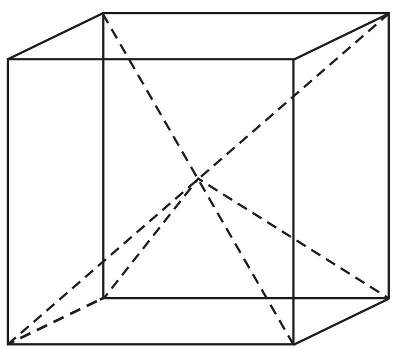
分数の計算では，約分や通分のところで戸惑いを見せる。学生は 3 進法ゆえの難しさであると思っているようなので，実は 10 進法でも分母分子に出てくる素数が大きくなると簡単ではないことを話してみせる。そのついでにユークリッド互除法に触れている。10 進法に戻ってから，9 や 11 で割れるか否かの判定の話をしたり，循環小数の話をしたりしてこの分野を終えている。このあたりを 3 進法でやるなどというのも使える教材であると思う。3 進法で表された数が偶数になる判定法は，各桁の和が偶数であることなどが一例である。

当初は 2 進法でやり始めたのだが，この場合は割り算が簡単すぎる。n 進法でもできるが，教材として適度な難しさがどのあたりなのかに迷

うところではある。

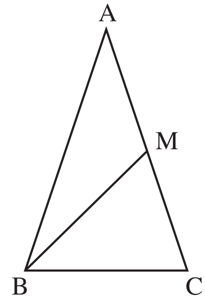
4. 四角錐の工作

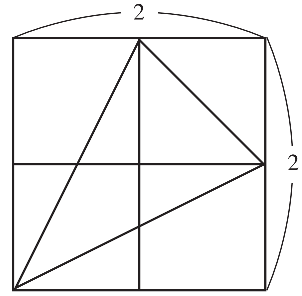
体積の公式で，錐体の体積は，底面積と高さを掛けたものに $\frac{1}{3}$ を掛けるというものがあるが，これをちゃんと説明するには積分が必要になるという話をしている。高等学校で学習していることだとは思うが忘れてしまっているようである。それに関連した実習として，同じ四角錐を 6 個作り，それを集めると立方体になるように工作をさせている。側面の三角形の決め方がけっこう難しいようだが，楽しんで作っている。側面の三角形の決め方をどのように小学生に説明するかを考えさせるのをねらいとしている。三平方の定理を使って考えてしまうので，それを使わずにという条件をつけると，立体図形の感覚を養うのには良い課題になっていると思う。定規とコンパスだけで展開図を作らせるというのは，高校生にも面白い課題であると思う。



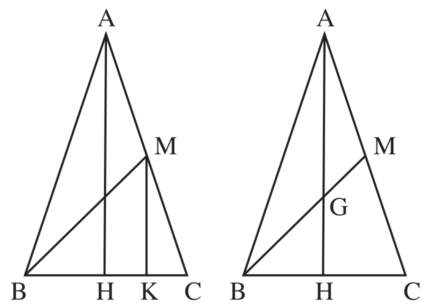
5. 三角形

次の話は小学校向けの講義では使えないが，高校生には面白い教材であると思うので，紹介する。それは「おりがみ」を使った図形問題である。元々は『数学教育』(明治図書，1994 年 11 月) に載っている。私は，芳賀和夫『オリガミクスによる数学授業』(明治図書) で知った。この本にあるネタは時々使わせていただいている。左が問題図であるが， $AB = AC = \sqrt{5}$ ，$BC = \sqrt{2}$ で M は AC の中点である。このときの BM の長さを求める問題である。





右の図の正方形をおりがみに見立てているわけである。答えが $\frac{3}{2}$ であることがすぐにわかる。この図から抜き出して作題したものと想像するが，左の問題から右の補助線はまず思いつかない。高校生に出題すれば大半は余弦定理を使って答えるのではなかろうか。学生にレポート問題として出題したら，いろいろな答えが出てきた。下の左の図では，A から BC へおろした垂線の足を H とすれば BC の中点になるので AH の長さが求まる。MK はその $\frac{1}{2}$ なので，三平方の定理をもう一度使えば答えが出る。右の図では，重心が中線を 2：1 に内分することを用いて GH の長さを求め，BG を三平方の定理で求め，再び重心の性質を使えば答えが出る。



また中線定理を使ってもすぐにわかる。面積を求めるヘロンの公式を使うと，4 次方程式が出てくるが，x^2の 2 次方程式なので見かけより簡単に答えは出てくる。4 つの解のうち 2 つは負なのですぐに捨てられるが，残りのどちらかを採用するのかを少し考えなくてはいけない。

数学にはいろいろな解法があると言われるが，これほど多いものも珍しいと思う。

以上，高校生にも使えそうな教材を紹介してみたが，いかがだろうか。採用して面白い反応があったら知らせていただければありがたい。