

# 見えないモノを観る数学の世界

## —有限と無限の世界の往来 & 自己と他者の往来—

早稲田大学大学院 東京学芸大学

非常勤講師 駒野 誠

### 1. 数学とは何か：数学者はどう見ているのか

これを題名とする本が手元に2冊ある。2001年リチャード クーラント、ハーバート ロビンズの『数学とは何か』(岩波書店)と2010年アティヤの『数学とは何か』(朝倉書店)である。原著のタイトルは共に、『What is Mathematics?』である。前者は、数学の基本概念を具体的に記述した名著である。後者のアティヤは、数式を使わず、「第1部 数学と科学」の中の「知性・物・数学」の「3節 数学とは何か」(pp.7-10)で、数学とは何かを定式化して、「定理は発見されるのか、あるいは発明されるのか?」と問い、その答えとして、(1)数学は人間の集団の知性の中にあるものである。(2)たくさんの定理は存在するが、私たちはその中から欲するものだけを選択する、と書いている。(1)の「人間の集団」が肝だろう。

#### Episode 1 「…とは何か」の‘とは論’

一休宗純の禅問答は、問いが作麼生(そもさん)で始まり、答えは説破(せっぱ)で始まるスタイル。同様に「…とは何か」というシンプルな質問は根本問題を浮かび上がらせる効果があり、聞かれれば考えざるを得なくなる。たとえば、「数列とは何か」のような問いを発すると、「おっ、来たか」と根本から考えざるを得ないが、考えるといろいろなことが関連し、新たなコトも生み出される。最近、「群とは‘はかる’道具である。」との話を聞いて、数学の世界が広がった。群は、数学の特徴である無限の有限化(差別化)に寄与する相棒(パートナー)なのである。

#### Episode 2 ある研究会後の懇親会中のトイレ

生物の先生に「先生が教えたい生物とは何?」と尋ねると、戻る途中に「生物の多様性」と答え

てくれた。この先生の授業を聞きたいと感じた。

現在の筆者の「数学とは」を紹介する：

「数学とは、モノに数を付けることで始まる学問で、有限と無限の2つの世界を行き来するものである。」この往来を橋渡しするのが関数である。無限の有限化と有限の無限化を思考し、自分のことさえ見えない世界に生きる人間を生き生きと見せてくれる世界に連れて行ってくれる。

### 2. なぜ数学を学ぶか：この問いに正対するには

ここでの‘数学’は学校の教科書や参考書に制限された特別な数学を指していることは想像に難くない。筆者の言う項目である{1次方程式, 2次関数, 数列, …}などの、基本であり後述する‘魚’たちで[下位概念]に属していると考ええる。

この問いに正対するに、「後で役に立つから」の時間軸を立てるような話では生徒に意が伝わらないのは、将来の自分を想像するコトは容易ではなく今が大切なのであり、数学の勉強は価値あるものと思いたいが、疑問を呈しても自分の成長にとっての評価に値する答えが返ってこなかったからだろう。また「数学が役に立っている」と言葉で訴えはしても、仕組みなどの内容を授業では扱えるカリキュラムになっていない。

まず、シラバスとともに学校数学の理念を生徒にも明らかにすべきである。人間が関わっていることをわかりやすく表現したものにしたい。

そもそも限定された‘魚(後述)’の‘数学’で「数学は役に立つ」には無理があり、創造性にはほど遠い。

### 3. 学校数学の隠れた構造

1951年(昭和26年)の学習指導要領(中・

高数学科試案：昭和28年まで試案が付いていた）：「数学科の指導は「数学を」教えるのではなく、数学で「生徒を」教育していくことであるといえよう。」

この試案の意は以下の「[下位概念]」だけを教えるのではなく、[上位概念]を意識して教育する」と思えてきた。

〈筆者の考える「学校の数学の世界」の構造〉

[下位概念] 学習指導要領・教科書の内容：

定義、定理、公式

[中位概念] 下位概念の「覧古考新」によりリンクさせた本質的理解、教科書に欠けた定義の補足、他者への伝達表現・説明力としての式表示、図やグラフ、表などの視覚化（見える化）

[上位概念] ‘かぞえる、くらべる、はかる、かえる’を中心にした、「とは論」による概念理解と体験

（例）「面積とは」、「繰り返すとは」、…

[最上位概念] 数学の創造性で人間を元気にする

（例）①自分と他者の双対性（社会的構成主義）

②他者との関係の‘かけがえのない存在’の1次独立、③異なるものを同じと見做す同値類

アクティブラーニングは、最上位概念の①の他者に伝わる表現を小さな「とは論」を核に‘外化’する体験と捉えられる。

「なぜ数学を学ぶのか」に正対するには、「数学は役に立つ」では「本当？」という疑いの疑問符が付くが、「数学は人間を生き生きさせる」にかえると「どうして？」などその後を聞きたい質問にかわる期待がある。成熟した社会で、人間が社会を構成し、生存継続していくには損得風の経済的表現から社会貢献の文化的表現へとかえるのがよいと考える。局所の自己から他者を見る大域への動きが必要で、それが社会的構成主義であろう。

これからのAI（人工知能）時代は、データに潜む関係性・規則性に気づき、学んだことを「加減乗除」とアイデアの添加、また次元の上げ下げで、新たなモノを創造することが求められる。この創造性は数学本来が持っている世界である。創

造性の源泉となるよう基礎・基本を組み立てる。数学は無限に異なると見えるモノを有限化し、有限なデータから規則性を見抜き、定理など無限化する力を持っている。同値類はまさに有限化の典型的手法である。

Episode 3 第50回読売教育賞優秀賞（2001年）

そのときの内容：「数学教育の理念と中心概念」筑波大学附属駒場論集第41集2002年3月発刊（pp.131-146）をWebで検索できる。

数学教育には理念が必要であるとする広島大学の平林一栄先生の話から、理念とは何かを研究していた。当時、まだインターネットが普及していなかったので苦勞したが、企業の理念を研究したところ、目的や目標を分野ごと箇条書きしているものが多く、心に響くものがないので、これは理念ではないと感じていた。「数学教育の理念」とGoogle検索すると、今現在、筆者のものがトップに出るが、多くの方が理念を語れば本物の理念に近づくと期待している。

♠数学教育の理念（駒野2001）

「数学学習では、『無限をいかに掴むか』について学習するが、その学習過程において、今までの自分にはない新しい概念や認識を獲得し、明日の新しい自分の創造に資するものである。」

♣数学教育の目的（駒野2012）

「数学学習は、‘かぞえる’、‘くらべる’、‘はかる’、‘かえる’を主題として学習する過程において、思考空間の広がりと分類で、新しい概念や認識の獲得が可能になる考える力を養い、明日の豊かな社会の創造に貢献することを目指す。」

これらの文章に数学という単語は最初だけである。それは当然で、赤を説明するのに赤を使って説明する母親はいない。現行学習指導要領には理念は書かれていない。企業は、「ビジョン」>「理念」>「目的」>「目標」と位置付けるようである。

#### 4. 数学の世界

「水族館とは何か」を考えた人を紹介する。

Episode 4 TV番組『夢の扉』（TBS）2015.8.9

水族館プロデューサー中村元氏が登場した。彼

は、北海道の、冬は閉鎖する年間2万人の入場者しかない赤字の「山の水族館」を立て直した。予算3億円でリニューアルした結果、入場者数は10倍の20万人、地域の商店街のお店の売り上げも10倍、経済効果43億円と町が元気になった。どうしてか。彼は大学でマーケティングを専攻したので魚に詳しくないことがコンプレックスであった。あるときお客の行動に目が留まった。来場者は暗い個別水槽の前は素通りするが、青く明るい水槽の前では足が止まる。「これだ！お客は魚を見に来ているのではない。美しい水中を見に来ているのだ。」と。筆者はこの言葉を聞いて、これだ！と思った。

学校数学は、項目という魚を教えている。魚の種類は豊富で、1次方程式、2次方程式、合同、相似、数列、ベクトル、三角関数、微分積分、・・・などなど。しかし、魚たちが泳いでいる美しい水中を見せてはいない。つまり、数学の世界という水中は見せてこなかったのではないか。そこに動き回る種々の魚たちが生き生きとした姿を見せてくれている世界に、お客が仮想的に入り込む感覚を体験できる場が水族館のようだ。数学を教える教師は、個々の魚の特徴や生態を研究し教え込んできたのかもしれない。コンピュータと戦える人間の創造性が求められる時代、‘自得’を期待するだけでは済まない。ちなみに、自得とは剣道などでよく使われることばで、稽古で剣の理法を体得し、免許皆伝が与えられるようなことで、めったに自得できることではない。多くの生徒は、昔の水族館のような個別水槽の‘魚’学習[下位概念]だけで、巨大水槽の‘水族館’の数学の世界[上位概念]を自得するのは極めて困難である。そこで、生徒を青く美しい水族館に連れていきたい。技術の進歩とともに魚を見せる方法も変わったが、数学教育は、3Dプリンタ・GPSなどの高次元化の成熟した社会の変化に未だ対応できていない。

#### Episode 5 団塊の世代(1948年前後生)の5人

(1) 日数教札幌大会高等学校部会講演者 長崎栄三 (2015.8.6)

筆者と高校の同期である彼は、昭和31年の学習指導要領の中心概念について語っていた。講演で一番印象に残っているのが、数学者とカリキュラムの話をしているとき、「学校では項目だけを教えておけばよい。概念など方法は教える必要がない」と言われたという話である。これを聞いて、学校数学で自得に成功した人はそれで済むのだろうか、と思うと同時によく話してくれたと思った。「数学は、人間の彼方にある理想的な絶対の真理であるとするプラトン主義ではなく、人間が社会において創り出す可謬的なものであるとする社会的構成主義に立つ時、数学教育における数学的方法の意義が明白になると思われる。」と、凄じ指摘だ。(長崎栄三 高等学校数学科における「中心概念」の誕生とその後、日本数学教育学会誌、数学教育学論究、95,2013,p.256)

(2) 『ゾウの時間・ネズミの時間』(中公新書)の著者の本川達雄

彼は、この本を書いた動機をあとがきに書いている。「相手の世界観をまったく理解せずに動物と接してきた。こんな態度でやった今までのぼくの研究はどんな意味があったのか？」と呆然とした。それと同時に、こんな大事なことを教えてくれなかった今までの教育に怒りを感じた、と。

(3) 『高校で教わりたかった化学』(日本評論社)の著者の渡辺正

彼は、まえがきで、暮らしに役立つ化学と大学につながる化学の2つの願いをかなえた本にしたいと、化学の核心は、「化学の原理とは、置かれた環境のもと、電子も原子・イオン・分子も、できるだけ居心地をよくしたい(エネルギーを減らしたい)」と。本の最後には、何をすべきか？の4か条を記している。①現行教科書の総点検、②学習指導要領の刷新、③教科書検定の再考、④大学入試の再考、を示した後の締めくくりに最終行に、大学人の責任は重いと書かれている。

(4) 『闘う動物園』(中公新書)の著者の旭山動物園前園長の小菅正夫

彼は、動物園の概念をかえた。北大柔道部主将になったとき、自分たちが「何をしたいのか」と

いう目標と、それを成し遂げるために「何をすべきか」という手段を明確にし、不要な選手は一人としていない、必ずどこかに生きる場所があるということを部員全員で共有した。同様に、「何をやるのか？」→「命を伝える。」「その命の何を伝える？」→「動物の命の輝きを伝える。」を理念として掲げ、動物本来の魅力を引き出す「行動展示」で廃園危機を救った。

#### (5) アート引越センター創業者寺田千代乃

彼女をモデルにしたドラマ、藤原紀香主演の2003年のTVドラマ『あなたの人生お運びします』で印象に残った台詞がある。記憶が正確ではないが「引越し屋はお荷物運ぶだけやありゃしません、夢と幸せを一緒に運ぶんや。」というものである。ここに理念が表現されていると思えた。学校数学も項目を運ぶ（教える）だけでは、単なる運び屋に終わってしまう。一緒に、生徒の夢と希望も運ばなければならない。

以上、5人に共通なのは理念が伝わることである。皆、見えない世界をいかに観るかを、生徒・学生・お客と共に観ようとする気持ちで溢れ、短文で表現されている。

数学教育に話を戻すと、複素数は実数に虚数単位を添加した  $\mathbf{R}[i]=\mathbf{C}$  の世界であり、実数係数の多項式の剰余環  $\mathbf{R}[x]/(x^2+1)\cong\mathbf{C}$  の世界である。これに似て、我々教師は‘教えたいこと／見せたい世界’という商空間の世界を模索しているのではないか。水族館の巨大水槽の前に目をひらく子どもたちのように、興奮し、ドキドキ、ワクワクする世界がそこにあるからだろう。

**Episode 6** TV番組『夢の扉』2015.9.13 堀井俊宏（大阪大学）

彼は、マラリアのワクチン研究の世界的権威である。長い間、このワクチンは開発不可能と言われてきた。理由は、ハマダラカという蚊が持つマラリア原虫には、数千の抗原があり原虫ごとに異なるため、抗体を作っても攻撃対象と認識できず、対処するためには、それら異なっているように見える抗原を同じと見做せなければならなかったからである。彼は、SERA という物質はそれ

が可能であるということ突き止めた。ワクチンは、現在臨床試験中で2020年実用化とのことである。これを見て、中2の授業で、「インフルエンザワクチンのように、香港A型など攻撃対象を限定するのがワクチンである。しかし、数千も異なる相手を1つのワクチンで攻撃したい。数学的には何を考える？」と聞いてみた。すると、一人の生徒が「仲間」と発言した。とても嬉しかった。私と同じ答えだったので、どうしてそう思ったと聞くと「先生が数学的にと言うから」と。生徒に中1から語り掛けてきた「数学の世界」の話が届いていて、生徒が言葉に出してくれた。異なるものを仲間として見做す人間数学の話として、同値類の話をよくしていた。

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots = \frac{500}{1000} = \dots,$$

$$5-2=4-1=3-0=2-(-1)=\dots,$$

カレンダーの曜日  $3 \equiv 10 \equiv 17 \equiv 24 \pmod{7}$  などなど生徒にとって‘仲間’という人間としてのキーワードが数学にもあることに驚きを感じ印象に残っていたのだろう。これは言の葉の威力である。歌は人に元気を与える力を持っているのと同様に数学も言葉が重要であると再認識した。数学の1次独立を‘かけがえのない存在’と表現する人間あつての言葉で話すことが重要であろう。

**提案** これからの学校での数学教育は、数学者と数学教育者と現場教師が、‘生徒に見せたい数学の世界とは何か’をテーマに研究し議論すれば、お互いわだかまりなく未来の子どもたちのために貢献できるだろう。「創造性を拓く数学の世界」コンテストを企画し、世界に類のない画期的なものを作ろう。

#### 5. 結語 数学の世界をのぞかせるには

「とは論」を意識して取り組むことが肝要であり、さすれば様々なことがリンクしていることが見えてきて本質の世界が垣間見えてくる。それにより、生徒は学びの奥深さに目をひらくに違いない。