ワンポイント教材

海城中学校高等学校　大和澄夫先生の
ワンポイント教材①

# 自然対数の底

## ～金融から生まれた自然な数～

数学で用いられる定数は数学だけで考えられたものではなく，人の営みから発見されたものも多いのです。貯金などの利息を計算するとき，元金を $A_0$，利率を $r$，期限を $N$ とすると，複利での元利合計 $A$ は次のようになります。

$$A = A_0(1+r)^N$$

ところで，$a$ を 1 でない正の実数とします。このとき，$h$ を絶対値がとても 0 に近い実数とすると $a^h$ は大体 1 になります。今から 300 年ほど前から，天文や数学（ネイピアの対数）だけでなく経済活動の発展につれて金融関係からも $a^h \fallingdotseq 1+h$ という性質をみたす数の重要性が意識されるようになりました。$a=2$ や $a=3$ ではこうはなりません，特定の数だけなのです。

この数は**ネイピアの数**またの名を**自然対数の底**といい，記号はこの数を実際に求めた数学者オイラーの頭文字を用いて $e$ と表される数についてのはなしです。

$$\boxed{e = 2.718281828459045\cdots}$$

「ふないちわにわいちわにわ，しごくおしい」などと覚えました。とても自然とは思えません。まず，電卓やパソコンを使ってこの数の不思議を観察しておきます。

$e^{0.05} = 1.051271096376024\cdots$

$e^{0.01} = 1.010050167084168\cdots$

$e^{-0.05} = 0.951229424500714\cdots$

$e^{-0.01} = 0.990049833749168\cdots$

$h$ の絶対値が 0 に近い数のとき，次が成立していると言ってよいのではないでしょうか。

$$e^h \fallingdotseq 1+h \quad \cdots①$$

**ここからが本題です。**（不思議ですが実際に $e$ の値を知らなくても求められます）

元利合計を月毎，週毎，日毎，…，連続的に求める場合の計算はどのように行えばいいのでしょうか。例えば，$N$ が 4 年 3 ヶ月（$N=4.25$ 期）では？

$$(1+r)^{4.25} = (1+r)^4 \times (1+r)^{0.25} \quad \cdots②$$

$(1+r)^4$ は何とかなりそうです。問題は $(1+r)^{0.25}$ です。ところで，利率 $r$ は 0 にとても近い数です。式①の $h$ と同じと考えられます。すると

$$e^r \fallingdotseq 1+r \quad \cdots③$$

が成立します。年利が $r=0.2$ とすると①から $e^{0.2} \fallingdotseq 1+0.2=1.2$ です。これを利用して②を当時の方法を想像して計算してみます。

$(1+0.2)^4$ の計算にはパスカルの三角形を用います。

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ${}_4\mathrm{C}_k$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |
| $r^k$ | 1 | 0.2 | 0.04 | 0.008 | 0.0016 |
| ${}_4\mathrm{C}_k \times r^k$ | 1 | 0.8 | 0.24 | 0.032 | 0.0016 |

上の表の計算を用いて $(1+0.2)^4 = 2.0736$ となりました。

$$(1+0.2)^{0.25} \fallingdotseq \left(e^{0.2}\right)^{0.25} = e^{0.2\times0.25} \fallingdotseq e^{0.05} = 1.05$$

$$\therefore (1+0.2)^{4.25} \fallingdotseq 2.0736 \times 1.05 \fallingdotseq 2.1773$$

手元の関数電卓で $1.2^{4.25} \fallingdotseq 2.1703$ となりました。

### ■微分法への道へ

ここでも，$h$ を 0 に近い微小数とします。

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} \fallingdotseq \frac{e^x(1+h)-e^x}{h} = e^x$$

**これはとても良い $(e)$ 性質だ！**

**$e$ は，絶対値が 0 に近い数 $h$ に対し，$e^h \fallingdotseq 1+h$ であることで，人類の寳（たから）になりました。**

通巻第 72 号　©編修・発行　実数出版株式会社　定　価（本体200円＋税）
2016年　3月 25日　印刷　代表者　戸　塚　雄　弐　発行所　〒102-8377　東京都千代田区五番町 5
2016年　4月　1日　発行　TEL. 03-3238-7777
http://www.jikkyo.co.jp/