じっきょう
数学資料 No. 71

平面幾何の ICT を用いた発見的学習の可能性

熊本大学教育学部教授　伊藤仁一

1. はじめに

新しい学びのスタイルとして，ICT の活用と発見的学習の必要性が，最近いろいろなところで聞かれます。ここでは，平面幾何の題材で，私が関わった ICT を使った発見的学習の事例を２つほど紹介します。

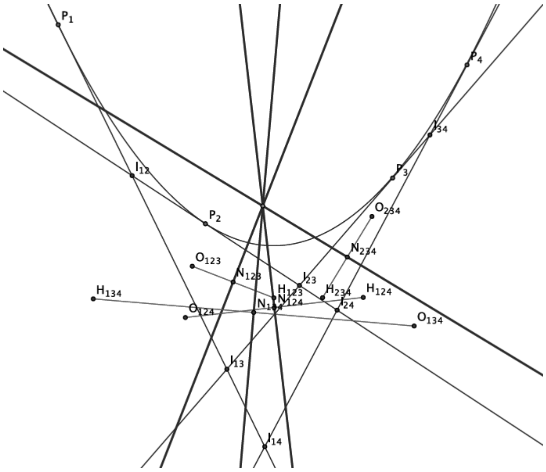
１つ目は，今ではほとんどの数学者に忘れられてしまった平面幾何の題材を使って，大学三年生の中尾君に Cinderella ([1]) を用いて発見的に調べてもらった事柄です ([6])。２つ目はモンゴルから教員研修留学生として熊本大学に来て，１年半滞在された J. Buyant さんとの結果です ([4])。

２．Hervey 点の再発見

今年の２月に，ある先生から，以下のようなことを聞きました。「放物線の異なる４接線からできる４個の三角形について，各三角形の垂心と外心を結ぶ線分の４本の垂直２等分線は１点で交わることを，昔の人はよく知っていたようだ。」少なくとも私は初めて聞く定理でしたし，旧制の中学校高等学校では，現在に比べてはるかに難しい初等幾何の入試問題が出題されたことは聞いていましたが，このような定理がそんなに多くの人に知られていたとは思えません。実際，本当に成り立つのだろうかという気にもなり，文明の利器であるコンピューターの図形ソフト Cinderella を使って私のゼミ生の中尾君に確認してもらいました。

今の学生はソフトを使いこなすことに優れていて，難なくインストールして,「確かに成り立ちそうです。」と報告してくれました。更に,「４つの垂心はその放物線の準線上にあるようです。」と言ってきました。「それでは，何とか証明することを試みてみよう。」となり,「放物線は全て相似だから，最も簡単な放物線 $y=x^2$ について接点の座標を用いて交点を計算できればよいので確かめてみて下さい。」と言ったのですが，偶然その学生が優秀だったこともあり，数日後に「何とかなりそうですが，まだ完全にはできません。」と言ってきました。２つの垂直２等分線の交点が，４つの接点の座標の対称式で書ければよいのですが，少し式が複雑で，てこずったようです。放物線を $2y=x^2$ としておくと式が少し簡単になり，何とか手計算で到達してくれました。

も　く　じ



あまりに美しい現象なので何処かに書いてありそうですが，幾何学大辞典（[3]）で放物線に関する項目を調べても見つかりませんでした。放物線の３接線からできる三角形の垂心が準線上にあることは，J. Steiner の定理（1827 年）で，その外接円が放物線の焦点を通ることは H. Lambert の定理（1761 年）であることが分かり，学生に再発見してもらったことになりました。他の２次曲線の場合にどうなるのかということが気になりだして，楕円のときに調べてもらいましたが，楕円の４接線についても成立すると言ってきました。

何か変だと感じ始め，やっと，任意の４直線に対してそれに接する放物線が存在することに思い至り，任意の４直線に対して成り立つことについて，幾何学大辞典を調べたら，４直線からできる４つの三角形について各三角形の垂心と外心を結ぶ線分の４本の垂直２等分線は１点で交わり，その点は Hervey 点と呼ばれていることが分かりました。確かに 1891 年にアメリカの数学教育の雑誌（Educational Times）に発表されて有名になった結果で，以前は比較的よく知られた定理だったようです。

定理（Hervey）　４直線からできる ４つの三角形について，各三角形の垂心と外心を結ぶ線分の垂直２等分線はすべて１点で交わる。

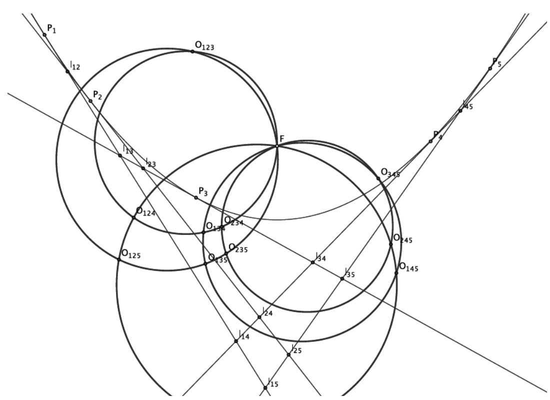
Hervey 点の一般化については，n 本の直線に対しても成立することが 20 世紀の中ごろ R.Goormaghtigh によって知られています。更に，F. R. J. Hervey の結果は V. Thebault によるとそれより前に，S. Kantor によってヨーロッパの雑誌に発表されていたとのことです（1870 年）。

３．放物線の接線からできる三角形

一般の４直線からできる４つの三角形に比べて，放物線の接線からできる三角形に対して何か別の性質がまだあるように感じて，更に何か見つからないか調べてもらった結果を紹介します。

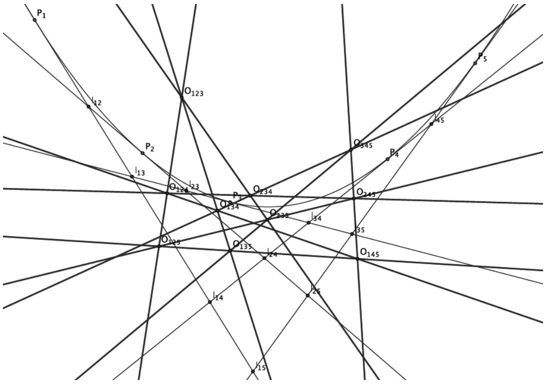
一般の４直線からできる完全四辺形に対して，その４つの三角形の外接円は一点で交わり，その点を Steiner 点と呼びます。４つの外心は同一円周上にあり，その円は Steiner 円と呼ばれています。また，４つの垂心は同一直線上にあることも J. Steiner によって知られています。前節で述べたように放物線の接線の場合には，この Steiner 点は放物線の焦点となり，垂心が乗っている直線が放物線の準線となり，このどちらも Cinderella を用いて学生にも発見してもらったのですが，「更に何か見つけられることはありますか？」と聞いたら，「Steiner 円も放物線の焦点を通りそうです。」と報告してきました。

定理　与えられた放物線の接線からできる全ての完全四辺形の Steiner 円は，その焦点で交わる。



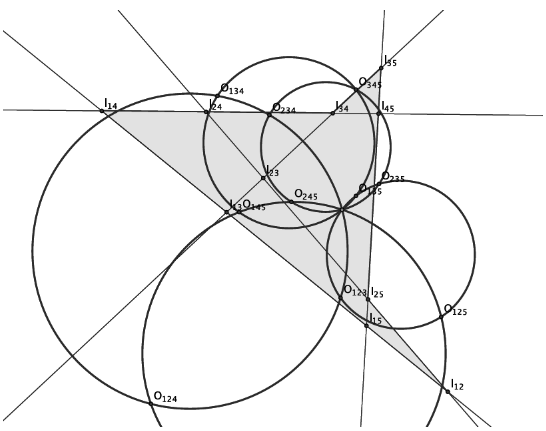
更に以下の様なことも発見してくれました。

定理　放物線の固定した２接線と他の接線とからできる三角形の外心は同一直線上にある。



これらの証明は，上記のような Hervey 点の証明をしていれば極めて容易ですが，新しい発見かどうかは定かではありません。実際，放物線の固定した２接線と他の接線とからできる三角形の重心および９点円の中心は同一直線上にあることは幾何学大辞典に載っていました。

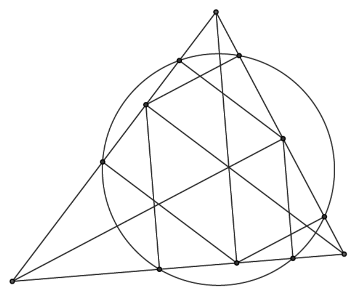
更に，放物線の接線でない５本の直線に対しても同様のことが成立することを Cinderella で確認していますが，その証明には，残念ながらまだ至っていません。勿論，この結果の証明に至れば，与えられた n 直線に対して，そのうちの任意の４直線からできる完全四辺形の Steiner 円は全てある１点で交わることになります。綺麗な性質なので，すでに知られている可能性が高いですが，今のところ容易に見つけられないことに驚いています。



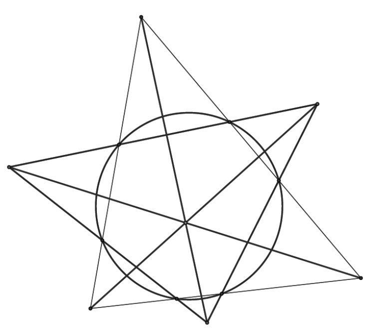
４．三角形と円から決まる点

５年ほど前に熊本大学教育学部に，日本の中学校高等学校にあたるモンゴルの学校の数学教師である J. Buyant さんが教員研修留学生として滞在されました。モンゴルのムンケ皇帝（ジンギスカンとフビライの間に実在した皇帝）はユークリッドの幾何学原論を勉強し，いくつかの問題を解いたと伝えられていて，民族的にも図形に関する興味が高いのかもしれませんが，彼は初等幾何に関する感覚が優れていて，来日して最初に会ったときに３つの問題を提示してくれました。

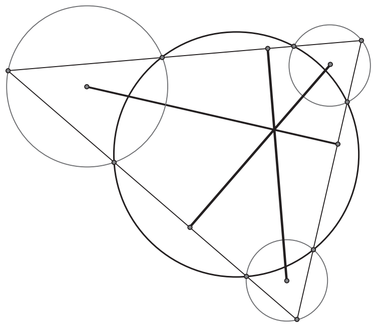
１つ目は，三角形の頂点から対辺におろした３垂線の足を通り，他の垂線に平行な線を引いた時の他の辺との交点は全部で６点あるがこれが同一円周上にありそうだというもの。



２つ目は，三角形と円が６つの交点（各辺に２つ）で交わっているとき，隣り合う２辺にある（１つの頂点に隣接する）２交点を結ぶ３直線からできる三角形の頂点と元の三角形の頂点を結ぶ３直線は１点で交わりそうだというもの。



３つ目は，三角形と円が６つの交点で交わっているとき，頂点とその隣接する２交点を通る小さい３つの円の中心から，対辺に下した垂線は１点で交わりそうだというものでした。



J. Buyant さんは，これらのことを GeoGebra という図形ソフトで見つけたということでした。

初等幾何のこのような問題を直ぐに解くというのが至難の業であることは，よく分かっていただけると思いますが，私としてもどうしたものかと途方にくれました。ただ，２つ目の問題は，数日で円に内接する六角形に関するパスカルの定理と射影幾何の基礎となったデザルグの定理を用いれば証明することができ，J. Steiner の結果として知られている定理だと分かってホッとしました。１つ目の問題は，三角形だけによる性質で，これなら三角形の 7000 以上の中心について調べてある C. Kimberling のリスト ([2]) にあるだろうと思われましたし，実際，389 番目の三角形の中心で，その円は Taylor 円と言われているもので，幾何学大辞典にも掲載されていました。

３つ目の問題についてですが，教員研修留学生として熊本大学の教育学部の学部２年生の幾何学演習の時間に学生に与えた以下の問題を見られて，それを補題として使うことで，J. Buyant さん自身が証明されました。

演習問題　三角形 ABC において３直線 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 U, V, W があるとき，これら３点でそれぞれの直線に立てた垂線が１点で交わるための必要十分条件は，

$$\mathrm{AW}^2+\mathrm{BU}^2+\mathrm{CV}^2=\mathrm{WB}^2+\mathrm{UC}^2+\mathrm{VA}^2$$

であることを示せ。

円が三角形の外接円なら３つの小さい円は頂点に退化するので，この３垂線の交点は垂心となり，垂心の一般化になっています。更に，以下の様ないろいろな事柄が分かったので，論文としてまとめることにしました ([4])。頂点に対して２交点の取り方は隣接している交点と限定しなければ８通りあり，そのどれに関しても対辺への３垂線は１点で交わり，その８個の交点は，円の中心と元の三角形の垂心との中点を中心に対称な２つの平行四辺形の頂点となるとか，円が内心を中心とする円の場合，上述の８個の交点は２点となり，内心と垂心の中点と外心を通る直線上にある等々。

5．おわりに

高等学校の発展的学習として，任意の三角形の重心，外心，垂心が乗るオイラー線は極めて重要であり，その上の重心と外心の中点にある九点円の中心については，是非ともほとんど全ての高等学校の数学教員が教養として知っておいてほしいものです。高等学校において初等幾何で ICT を用いて発見的学習を行えば，教員の想定を超え，生徒による Hervey 点の発見が，教室で起こることも十分にありうるのではないでしょうか？数学教員の真の数学能力の向上が最も望まれることですが，想定外の発見を生徒がしたときにその状況を共有し，その意義を議論しあうような教員間のコミュニティーが重要ですし，出来ればその中に教育に関心のある数学者が含まれていることが望まれます。

図を描く計算機ソフトの発達により，以前は気付かなかったような平面幾何の性質が，見つけやすくなっています。是非，発展的学習の時間や，SSH 指定校における生徒の研究活動等で，図形ソフトを使って中学生高校生自身に発見させる活動に役立てて頂ければと思います。また，生徒は先生方の数学に対する態度を見ていると思われますので，中学校高等学校の数学の先生方自身が，平面幾何に魅力を見出して研究されることは，数学（平面幾何）の面白さを広めるのに役立つものと信じます。ここでは平面幾何だけしか紹介できませんでしたが，勿論，立体を考えることがもっと興味を増します。

また，最近，学校現場には大型の電子黒板やタブレットの導入も進んできていますが，日常の数

学の授業において効果的に使われているでしょうか？ 数学科の授業での ICT 活用には大きく分けて次の２通りの使い方があると思われます。

１．教材呈示用の道具としての ICT 機器の活用

２．発見的学習の道具としての ICT 機器の活用

電子黒板に電子教科書を呈示し，いろいろなツールを使って分かり易く説明するとか，生徒の持っているタブレットに各生徒のレベルにあった問題を送信し，タブレット上で生徒が解いたものを，電子黒板に映して解説する等々，いろいろ便利な使い方があります。しかし，本来の ICT 機器活用の意義は２にあるものと思いますし，今回紹介したものも，中学校高等学校ではなく大学での事例ですが，発見的学習の成功例であると考えます。

最後に，ここでは触れませんでしたが，中学校で 作図ツール GC を用いての授業中に，あまり数学を得意としない生徒が教師の予期しない発見をし，それが拡張されていったという事例もあります。これに関しては，[5]を参考にしてください。

参考文献

[1] Cinderella.2 日本語版
https://sites.google.com/site/cinderellajapan/

[2] C. Kimberling: Encyclopedia of triangle centers,
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[3] 岩田至康編 : 幾何学大辞典全 6 巻 , 補巻 I, II 槇書店 , 1978.

[4] 伊藤仁一 , Jamsran Buyant: 三角形と円から決まるある点についての研究 , 熊本大学教育学部紀要　第 59 号 (2010), 11-18.

[5] 伊藤仁一 , 堀尾直史 , 山下雄太郎 : ICT 活用の図形学習の授業における生徒の発見とその一般化，　2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集 , 155-157.

[6] 伊藤仁一 , 中尾温 : 平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例 , 日本教科内容学会第 2 回研究大会プログラム要旨集 (2015), 25-26.