

複素数平面上の直線の方程式について

複素数を教えるにあたり、困難さをいくつか経験した。そのなかで特に感じたのは、共役複素数の重要性を説いてもなかなか生徒に通じないもどかしさである。そこで、共役を用いると利便性が増す例として、複素数平面での直線の方程式の教材化を行ってみた。そのため、共役複素数を当たり前のように計算に取り入れることが必要と考え、その方法の1つとして複素数に二種類の“積”を導入することを提案したい。

海城中学校高等学校 大和澄夫

第一節 内積と外積の定義

複素数はその共役と対をなして現れる場合が多い。例えば、計算の途中に $\alpha\bar{\beta} \pm \bar{\alpha}\beta$ の形がよく出現する。そこで、 i についての一次式である複素数をベクトルと捉え、共役複素数をもとの複素数と共になるべく自然に計算してしまう方法として、複素数の実数条件と虚数条件から内積と外積の導入を考えた。

複素数の「仮称」内積の定義

提案として、0 でない2つの複素数 α, β を位置ベクトルとしたときの垂直条件の判定式

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \text{ (純虚数)} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

から、特に垂直のときに値が0 となるように、平面上のベクトルの内積と同じ性質をもつ演算を次のように定義する。2つの0 でない複素数を α, β とするとき（少なくとも一方が0 でも形式的に定義）

$$\alpha \bullet \beta = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)$$

2つの複素数 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ に対して

(1) 成分で表すと（証明略；以下同様）

- i) $\alpha \bullet \beta = ac+bd \in \mathbf{R}$
- ii) $\alpha \bullet \alpha = a^2 + b^2 > 0$
- iii) $\alpha \bullet \bar{\alpha} = a^2 - b^2$

参考：行列表現

$$\alpha \bullet \beta = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

(2) いくつかの性質 ($\gamma \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}$)

- i) $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$
- ii) $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$
 $(\alpha + \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet \gamma + \beta \bullet \gamma$
- iii) $r\alpha \bullet \beta = \alpha \bullet r\beta = r(\alpha \bullet \beta)$

(3) 応用 (0 でない2つの複素数について)

i) 垂直条件

$$\alpha \bullet \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$$

ii) 平行条件

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow |\alpha \bullet \beta| = |\alpha| |\beta|$$

複素数の「仮称」外積の定義

内積と同様に「仮称」外積を考えることはできないのだろうか。2つの0 でない複素数を α, β とするとき、平行条件の判定式

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \text{ (実数)} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

から、特に平行のときに値が0 となるよう、次のように定義する。（少なくとも一方が0 でも形式的に定義）

$$\alpha \otimes \beta = \frac{i}{2}(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)$$

2つの複素数 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ に対して

(1) 成分で表すと（証明略；以下同様）

- i) $\alpha \otimes \beta = ad - bc \in \mathbf{R}$
- ii) $\alpha \otimes \alpha = 0$
- iii) $\alpha \otimes \bar{\alpha} = -2ab$

参考：行列式表現

$$\alpha \otimes \beta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(2) いくつかの性質 ($\gamma \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{C}$)

i) $\alpha \otimes \beta = -\beta \otimes \alpha$

ii) $\alpha \otimes (\beta + \gamma) = \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \gamma$

$(\alpha + \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes \gamma + \beta \otimes \gamma$

iii) $(\rho\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes (\bar{\rho}\beta)$

特に, i を虚数単位とすると

$(i\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes (-i\beta) = (i\beta) \otimes \alpha$

(3) 応用 (0 でない 2 つの複素数について)

i) 平行条件 (同一直線上)

$\alpha \otimes \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$

ii) 垂直条件

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow |\alpha \otimes \beta| = |\alpha| |\beta|$

次の直線の方程式の例のように, 垂直条件では内積を, 平行条件では外積を用いることによって計算の簡便化を行うことができる。

参考: 「仮称」内積と「仮称」外積の関係

$(i\alpha) \cdot \beta = \alpha \otimes \beta, \quad \alpha \cdot (i\beta) = -\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$

$(i\alpha) \otimes \beta = -\alpha \cdot \beta, \quad \alpha \otimes (i\beta) = \alpha \cdot \beta$

$(\alpha \cdot \beta)^2 + (\alpha \otimes \beta)^2 = |\alpha\beta|^2$

第二節 直線の方程式

公式 1 (内積型) 複素数平面上の点 z_0 を通り, 複素数 $\alpha (\alpha \neq 0)$ に垂直な直線の方程式。

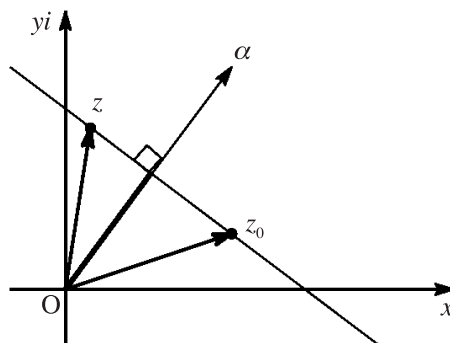
$z \neq z_0$ のとき, $\alpha \perp (z - z_0)$ から垂直条件より

$$\alpha \cdot (z - z_0) = 0$$

形式的に $z = z_0$ でもみたすので

$$\boxed{\alpha \cdot z = \alpha \cdot z_0}$$

図形的には, 直線上の任意の点から, 法線方向への射影は等しい。



公式 2 (外積型) 複素数平面上の点 z_0 を通り, 複素数 $\alpha (\alpha \neq 0)$ に平行な直線の方程式。

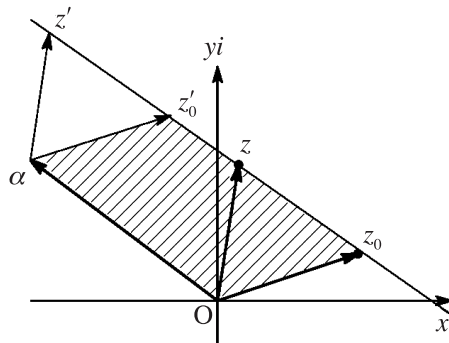
$z \neq z_0$ のとき, $\alpha \parallel (z - z_0)$ から平行条件より

$$\alpha \otimes (z - z_0) = 0$$

形式的に $z = z_0$ でもみたすので

$$\boxed{\alpha \otimes z = \alpha \otimes z_0}$$

図形的には, 直線上の任意の点と直線の方とでできる平行四辺形の面積は等しい。



例題 1 複素数平面上的点 $z_0 = 1+2i$ を通って、
複素数 $\alpha = 4+3i$ と

- (1) 平行な直線の方程式と各切片を求めよ。
(2) 垂直な直線の方程式と各切片を求めよ。

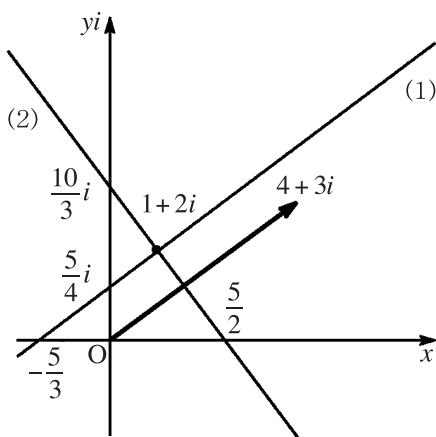
解答 平行条件 (外積), 垂直条件 (内積)

$$\begin{aligned} (1) \alpha \parallel (z - z_0) \text{ より, } \alpha \otimes (z - z_0) &= 0 \\ (4+3i) \otimes z &= (4+3i) \otimes (1+2i) = 5 \\ \therefore \alpha \bar{z} - \bar{\alpha} z + 10i &= 0 \quad (3x - 4y + 5 = 0) \\ \text{実軸: } \bar{z} = z \text{ として} \quad \text{虚軸: } \bar{z} = -z \text{ として} \\ (\alpha - \bar{\alpha})z &= -10i \quad (\alpha + \bar{\alpha})z = 10i \\ z &= -\frac{5}{3} \quad z = \frac{5}{4}i \end{aligned}$$

答 $(4-3i)z - (4+3i)\bar{z} = 10i$; $-\frac{5}{3}, \frac{5}{4}i$

$$\begin{aligned} (2) \alpha \perp (z - z_0) \text{ より, } \alpha \bullet (z - z_0) &= 0 \\ (4+3i) \bullet z &= (4+3i) \bullet (1+2i) = 10 \\ \therefore \alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z - 20 &= 0 \quad (4x + 3y - 10 = 0) \end{aligned}$$

答 $(4-3i)z + (4+3i)\bar{z} = 20$; $\frac{5}{2}, \frac{10}{3}i$



例題 2 次の二直線の交点の座標を求めよ。

$$\begin{aligned} (4-3i)z + (4+3i)\bar{z} &= 20 \quad \cdots \text{①} \\ (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} &= -6 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

解答 ①×2+②×3として, 11を約す。

①-②×4として, -11iを約す。

$$z + \bar{z} = 2 \wedge z - \bar{z} = 4i \quad \therefore z = 1+2i$$

答 $z = 1+2i$

解答 内積で方程式を表現。

$$(4+3i) \bullet z = 10 \quad \cdots \text{①}, \quad (1-2i) \bullet z = -3 \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{①} \times 2 + \text{②} \times 3; \quad 11 \bullet z = 11 \quad i.e. \quad 1 \bullet z = 1$$

$$\text{①} - \text{②} \times 4; \quad (11i) \bullet z = 22 \quad i.e. \quad i \bullet z = 2$$

$$\therefore z = 1+2i$$

解答 外積で方程式を表現。

$$(3-4i) \otimes z = 10 \quad \cdots \text{①}, \quad (2+i) \otimes z = 3 \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} \times 4; \quad 11 \otimes z = 22 \quad i.e. \quad i \otimes z = 2 \quad (y=2)$$

$$\text{②へ代入; } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore z = 1+2i$$

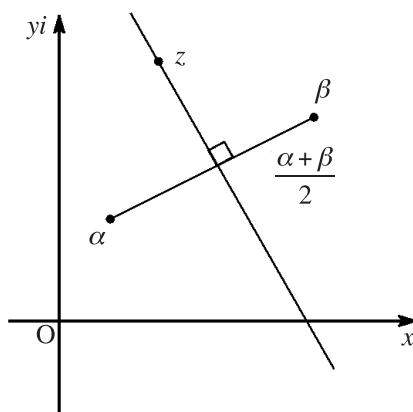
例題 3 複素数平面上的異なる二点 α と β の垂直二等分線を表す方程式を求めよ。

解答 この直線は $\beta - \alpha$ に垂直で, 中点 $\frac{\alpha + \beta}{2}$ を通る。したがって, 直線上の点を z とすれば

$$(\beta - \alpha) \bullet \left(z - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 0$$

これを変形

$$\begin{aligned} &(\beta - \alpha) \bullet \{ 2z - (\alpha + \beta) \} \\ &= 2(\beta - \alpha) \bullet z + (\alpha - \beta) \bullet (\alpha + \beta) \\ &= (\beta - \alpha) \bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) z + |\alpha|^2 - |\beta|^2 \end{aligned}$$



答 $(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + (\alpha - \beta)\bar{z} - (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}) = 0$

二直線の交点を通る直線の方程式

複素数平面上的点 z_0 を通る直線の方程式は内積型で表すと $\alpha \bullet (z - z_0) = 0$ である。このとき, 法線ベクトル α を意識すると

補題 1 異なる二直線 $f(z)=0, g(z)=0$ の複素数平面上での交点が z_0 のとき、この交点を通る任意の直線の方程式は p, q を実数とすると

$$pf(z)+qg(z)=0 \quad (p \neq 0 \vee q \neq 0)$$

である。

証明 点 z_0 を通る二直線 $f(z)=0, g(z)=0$ をそれぞれ法線ベクトル α, β を用いた内積型で

$$\alpha \cdot (z - z_0) = 0, \quad \beta \cdot (z - z_0) = 0$$

とする。点 z_0 を通る任意の直線の法線ベクトル γ は、 α, β が実数上一次独立なので、適当な実数 p, q を用いて $\gamma = p\alpha + q\beta$ と表すことができる。

よって方程式 $(p\alpha + q\beta) \cdot (z - z_0) = 0$ 、即ち

$$p\alpha \cdot (z - z_0) + q\beta \cdot (z - z_0) = 0$$

c.q.f.d.

これは外積型の直線についても成立する。

例題 4 次の二直線の交点と点 $(0, 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

$$\begin{cases} 5x - 6y + 15 = 0 \\ 5x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

解答 これらを内積型で表して

$$\begin{cases} (5-6i) \cdot z + 15 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \\ (5+i) \cdot z - 20 = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

実数 p, q を用いて、 $\textcircled{1} \times p + \textcircled{2} \times q$ とする。

$$\{p(5-6i) + q(5+i)\} \cdot z + 15p - 20q = 0$$

点 $2i$ を通るので

$$\begin{aligned} \{(5p-5q) + (-6p+q)i\} \cdot 2i + 15p - 20q &= 0 \\ \therefore 3p - 18q &= 0 \end{aligned}$$

即ち、 $q=1$ とすると $p=6$ とおける。よって、求める直線の方程式は、係数を簡約化して

$$(1-i) \cdot z + 2 = 0$$

$$\text{答 } x - y + 2 = 0$$

実際に交点を求める。

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 6$ を 35 で割り、 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ を 7 で割ると

$$\begin{cases} 1 \cdot z - 3 = 0 & i.e. \quad x = 3 \\ i \cdot z - 5 = 0 & i.e. \quad y = 5 \end{cases} \quad \therefore z = 3 + 5i$$

解答 それぞれの方向ベクトルが $6+5i, 1-5i$ なので、これらを外積型で表して

$$\begin{cases} (6+5i) \otimes z - 15 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \\ (1-5i) \otimes z - 20 = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

実数 p, q を用いて、 $\textcircled{1} \times p + \textcircled{2} \times q$ とする。

$$\{p(6+5i) + q(1-5i)\} \otimes z - 15p - 20q = 0$$

点 $2i$ を通るので

$$\begin{aligned} \{(6p+q) + (5p+5q)i\} \otimes 2i - 15p - 20q &= 0 \\ \therefore -3p - 18q &= 0 \end{aligned}$$

即ち、 $q=1$ とすると $p=-6$ とおける。よって、求める直線の方程式は、係数を簡約化して

$$(1+i) \otimes z - 2 = 0$$

$$\text{答 } x - y + 2 = 0$$

実際に交点を求める。

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ を 7 で割り、 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 6$ を 35 で割ると

$$\begin{cases} 1 \otimes z - 5 = 0 & i.e. \quad y = 5 \\ i \otimes z + 3 = 0 & i.e. \quad x = 3 \end{cases} \quad \therefore z = 3 + 5i$$

今後の課題

例題 3 のように、初等幾何への応用も考えられる。今後の課題として、時間をかけて内積や外積に適合した教材を作り出して行くことが必要と思われる。