数学教育の理念と教材開発（その２）
―Active-Learning へ向けて―

早稲田大学大学院・東京学芸大学
非常勤講師　駒野　誠

1．授業で垣間見えること

早稲田大学大学院数学教育の１年生修士の担当であったが，制度廃止に伴い，2015 年より教育・総合科学学術院に所属し，「インターンシップのための教科教育論（数学科）」の授業を院生にしている。他に，東京学芸大学で「中等数学科教育法Ⅳ」および私立中学・高校で中・高生にも授業をしている。大学・大学院で授業をしていると，中・高での様子が垣間見えてくる。学生が数学で何を学んだか，学習項目以外の記憶が乏しいのである。アインシュタインの名言「学校で学んだことを一切忘れてしまった時に，なお残っているもの，それこそ教育だ。そして，その力を社会が直面する諸問題の解決に役立たせるべく，自ら考え行動できる人間をつくること，それが教育の目的といえよう。」[*1]

2．教材の研究は日常の疑問から

(1) 大学入試問題にヒントを見出す

教科書とは一見乖離しているように見える入試問題を，生徒が解決するためには，どのような布石を打っておけばよいのか。そのための教材は何か思案する。

1994 年東大のマンハッタン距離の問題から： 2 点 $\mathrm{O}(0,\,0)$，$\mathrm{A}(1,\,1)$ からマンハッタン距離が等しい点の集合は？

$$|x|+|y|=|x-1|+|y-1| \quad (\text{図 }1)$$

この問題から絶対値記号を用いた等式の２次元化を開発しようとなった。$|x|+|y|=1$…①は教師にとって常識であるが，①を $\sqrt{2}$ 倍，45°回転拡大した図２の正方形が $|x-y|+|x+y|=2$ …②で表されることは常識ではない。絶対値を用いた１つの等式で図形を表現することは，フリーソフトを利用しても確認でき，生徒が興味を持って挑戦する数学的活動である。[*2]　①と②の共通点は，マンハッタン距離，すなわち，碁盤の目のような街路を進むときの距離である。①の無限に敷かれた街路は軸 $x=0$ や $y=0$ に平行で，原点からのマンハッタン距離が１の点集合である。②の無限に敷かれた街路は，直線 $x-y=0$，$x+y=0$ に平行で，原点からこの街路で進むマンハッタン距離が $\sqrt{2}$ の点集合で，軸に平行な辺をもつ正方形である。

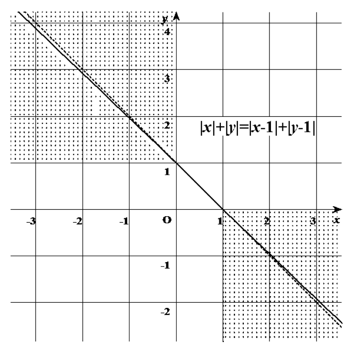

図１

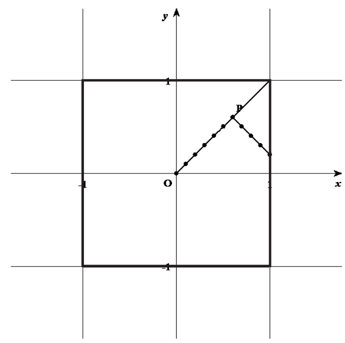

図２

(2)「・・・の授業」では何を教えたいのか

ねらいを自分の中で明確にする。創造性の源泉となる概念を指導するには何を指導するのか。

Q：三角関数指導で何が最も大切なことなのか？

A：変化する中に一定なもの（周期）を見つけ出

し，それを表現すること！　（後述で詳しく）

(3) わかりやすい授業にするには

前号の平方完成は,「平均」が‘見える化’の肝であった。次は「共通因数」が‘見える化’の肝。

例１ ２次式 $12x^2+25x+12$ を因数分解せよ。

これも研究しないと生徒に苦労させることになる典型的な例である。因数分解以前の展開が基本である。

「展開の定義（教科書にない）は，括弧の中から項を１つずつ選び積をつくることをすべての場合に行い，それらの和を求めること。」

「分配法則で括弧をはずす」という言い方では２項定理で苦労するから，作業工程を明確に定めた定義がよい。

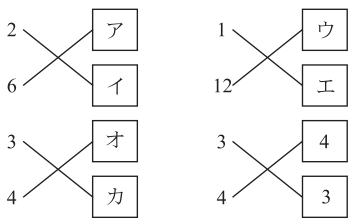

図３

1989 年，筆者が筑波大学附属駒場中・高等学校に着任した高１での授業： $12x^2+25x+12$ の‘たすき掛け’の説明を始め,「ア , イやウ , エはダメで，オ , カは順に 3，4 はダメで図３の右下のみが残る。なぜか？」と質問すると，生徒は「たすきに掛けた合計が +25 にならないから」と言う。「たすきに掛けることなくわかるのだが，その理由は？」と質すと，困った顔になった。

明治以来，たすきに掛けた数の和が１次の係数に一致するときだという‘たすき掛け’の指導は改善されておらず，残念，残念，・・・と１次の係数が一致するまで繰り返す指導をしてきた。

「元の２次式の係数には共通な因数がないから，たとえば，$(3x\quad 3)(4x\quad 4)$ は即ダメと判明する。」と言うと，生徒の顔つきが変わった。筑駒で授業ができると思った瞬間であった。

中・高での数学は，生徒の頭の中に‘小さな数学の世界’を創ってもらうこと。自分の世界があれば新たなモノが創れるかもしれないからである。

例２　不定方程式 $126k-11\ell=1$ をみたす整数 k, ℓ をすべて求めよ。(2015 センター試験より)

（考え方）特殊解を見つけようとすると苦労する。本質はユークリッドの互除法であるが,‘見える化’すると，次のような合同式の考え方になる。

$5k\equiv 1\pmod{11}$ …①　　←　１文字消去

$11k\equiv 0\pmod{11}$ …②　　←‘見える化’の相棒

②－①　$6k\equiv -1\pmod{11}$ …③

③－①　$k\equiv -2\equiv 9\pmod{11}$ …④

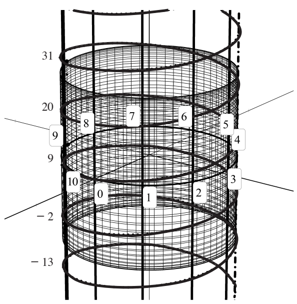

図４

円柱側面に 0 から 10 を代表とする上下に無限に伸びる 11 本の柱が立っていて，その線上の数は皆仲間である。それらは，各柱に 11 飛びで配列されている。mod 11 の世界である。

図４の螺旋の各柱は公差が 11 の数列で，代表が９であるものは

$$k=9+11n \text{（ } n \text{ は整数）}$$

$126k-11\ell=1$ に代入して,

$\ell=103+126n$（ $n=0$ のときがセンターの問題）

３．私的数学教育観

次の図５は，学会発表の際には必ず掲載するようにしている筆者の数学教育観である。長く現場で授業し，教材を考えていると気が付くことがまだまだたくさんある。いろいろなことが繋がってやっと少しわかってきた感じがする。

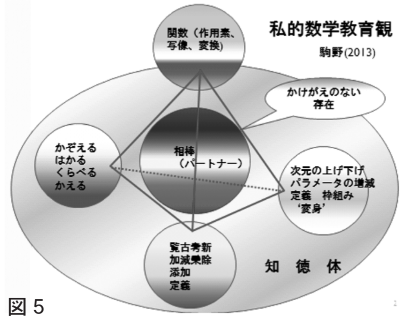

図５

「かぞえる，はかる，くらべる，かえる」と大和言葉のひらがなが味噌である。漢字にすると，量る，測る，計る，図る，などいろいろな意味があるが，‘はかる’はこれらすべてを内包する。核となる４つ目を‘かえる’におさめることには３年を要した。次元をかえる，パラメータで置きかえる，立場をかえる，視点をかえる，数の範囲をかえる（場合分け），…など前の３つ以外の多種多様な内容を含んだ高度な概念である。立場をかえる例（主人公 x, y と脇役 a, b の交代）を紹介する：

例３　$y=ax+b$ …☆が線分 $(0 \leqq x \leqq 1, y=1)$ を通過する a, b の条件を ab 座標平面に図示せよ。

（考え方）☆　$\Leftrightarrow b=-xa+1(0 \leqq x \leqq 1)$

点 (x, y) と点 (a, b) が対応する Duality（双対性）によって，xy 座標平面上の直線の通過領域を，ab 座標平面に‘かえる’と本質が見えてくる。

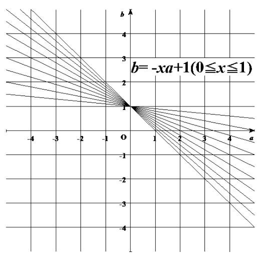

図６

４．数学とは何か

「数学はモノに数を付けることでコトを始める学問」と道行く人にも伝わるようにしてみたい。国語は‘ことば’を，音楽は‘音とリズム’を，理科は‘実験・観察’をと，モノの見方を示した付け方だろう。数の付け方には規則性があって初めて皆が使える，関数そのものである。よって，「数学は無限と有限を往来する乗り物である。」というのがぴったりくる。人は無限を理解するために同値類などで有限化を試みる。有限を眺めていると無限化できることがある。規則性・関係性に気付くからである。数学化の１つにモデル化があるが，その授業の秘訣はと聞かれれば，生徒に「モノ（事象）に数を付けることを考えてごらん」と。

５．Active-Learning とハイブリッド化

デジタル化によって，社会は一気に高度情報化へと突き進みビッグデータの時代と言われる。しかし，教育界は不易に後ろ髪引かれ，流行への対応に躊躇してきたきらいがある。そんな中，次期学習指導要領では Active-Learning（以下 AL と略す）が‘数学的活動’の手法として加わることになる。前の号でも書いた，数学科が「創造性の基礎を培う」を忘れたら存在意義は薄くなる。それは，他教科とて同じである。歴史の年号や人物など記憶しただけでは生きる力にはなりえない。教科としての数学も同じで，新たなコトに立ち向かう姿勢と数学をつくることが同調しているハイブリッドな指導が望ましい。「公式や定理→問題を解く」という従来の流れを**逆**にすれば学習者を惹きつけるだろう。生徒が自分で課題を見つけだすことは楽しいし，それを考えることも楽しいということを体感させたい。

ハイブリッドとは，「異なった要素を混ぜ合わせたもの・組み合わせたもの（雑種）」という意味である。数学科のハイブリッド化は，「覧古考新」と「加減乗除」が心柱といえる。

例）三角関数

(1) 平面上の点の位置の決定方法

AL1　空港の管制官が離着陸のジェット機の位置をどうやって知るのだろうか。

(期待) 同心円のレーダーチャートの極座標系など

(2) ２つの座標系の往来

２つの世界をつなぐ式を変換式という。日常ではドルと円の変換，肉の重さと値段など。

AL2　２つの系を‘くらべる’ことが‘見える化’である：$(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$　小・中でのグラフ用紙の座標とレーダーチャートの座標の関係は？

三角関数の定義：単位円上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ の後，種々の公式・定理群などをどうつくっていくのか。抜本的改善策を考えてみよう。

AL3　観覧車の二台のゴンドラに着目。不変量，変化量を探してみよう。

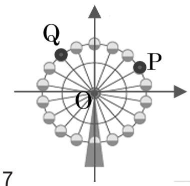

図 7

予想：① 2 点間の距離，②扇型 OPQ の面積，
③△OPQ の面積，
④ P, Q の特別な位置関係；
$\angle POQ = 90°$，　$\angle POQ = 180°$など，
⑤ P, Q のゴンドラの地上からの高さとその和など
これらの課題を 1 つずつ解決していこう！
と，挑戦していく **‘構え’** の姿勢を形成する。

AL4　円周上の 2 点の座標を $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，点 $Q(\cos\phi,\ \sin\phi)$ として予想を解決していこう。

→②, ③を最初に攻略させるとよい。次に，①の解決。（「今日は加法定理を学習する」という講義はストップし，生徒が自ら課題を発見し，学ぶ構えをつくることから始めよう）

$\angle POQ$ が一定 $\Leftrightarrow$ PQ の長さが一定から，距離の 2 通り（余弦定理と距離の公式）の表現から加法定理を導きたい。$PQ=2\sin\dfrac{\phi-\theta}{2}$　$(\phi>\theta)$との関係も出ることを期待。
定義に慣れたら，次へステップアップする。

AL5　2 点 P, Q が $\angle POQ = 90°$ のとき，
四角形 POQR が正方形となる点 R の動きを調べてみよう。

点 P の x 座標の $\cos\theta$ と y 座標の $\sin\theta$ の和に見える $\sin\theta+\cos\theta$ をどう考えるのか。 x 座標と y 座標は方向が異なるから，デジタル的には求まるがアナログ的には和を求めることはできない。下の図 8 が鍵となる。

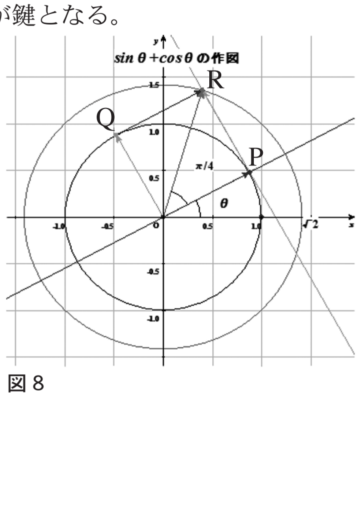

図 8

$\angle POQ = 90°$となる相棒 Q を考えることで，y 座標同士の和になる。
$Q\left(\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ これは加法定理によって，$Q(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ であり，
$R(\cos\theta-\sin\theta,\ \sin\theta+\cos\theta)$である。この図 8 の R の本質は図 9 の Q である。Q が P を中心とする円上の点で，回転しながら動いていると見えると面白くなる。

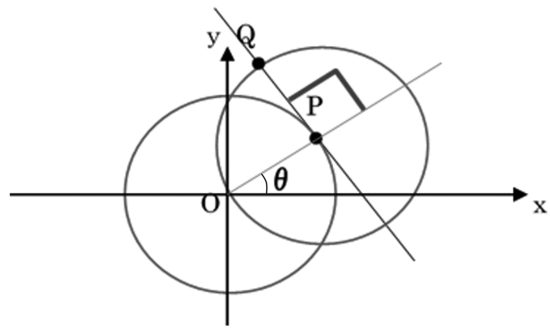

図 9

AL6　観覧車の各ゴンドラは同じスピード・半径で回る。異なるスピード・半径で回る乗り物を遊園地で探して，数学で動きをとらえてみよう。

→そう，コーヒーカップは面白い動きをする。そこで，「覧古考新」である。

AL7　コーヒーカップの軌道を解析してみよう。
　全体の円盤がまわる上をコーヒーカップがまわる。回るときは三角関数の定義が使える。
条件：
点 P は半径 2 の円盤上，カップの半径 1
回るスピードは，台の点 P の回転角が θ のとき，カップの点 Q は 7θ と早くまわる。
（2015 センター試験より）

$7\equiv 1 \pmod 6$ より，周期 6 である。

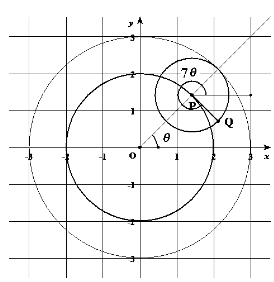

図 10

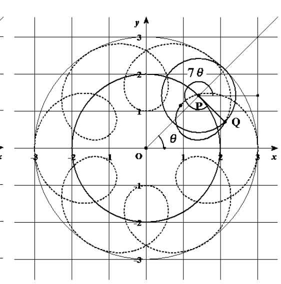

図 11

グラフの図はフリーソフト Function View や Grapes で描いたものである。パラメータを動かすと図形が動くのが面白い。いろいろと動かしたくなるので学習に適している。

6．なぜ三角関数を教えるのか

重要なテーマを忘れた授業には力がない。他の関数とは異なる‘周期’をもつことを意識すれば，その布石を考えることが教材開発になる。[*3]

周期ある関数は中学の教科書では扱われていないので，初めて出会う生徒もいる。周期あるものは日常に溢れているので，AL により生徒に発表させるとよい。（月の満ち欠け，海面の満ち引き，地球の公転，…）ここでは，スケールの大きい周期を紹介したい。太陽系（太陽および太陽の周囲を公転する天体（惑星）など）は，銀河系の中心から約 26,100 光年の位置にあるようで，太陽系は秒速約 217 km の速度で銀河系内を約 2 億 2,600 万年かけて 1 公転するという。動画[*4]で，太陽系の動きを見れば，きっと世界観が変わる。

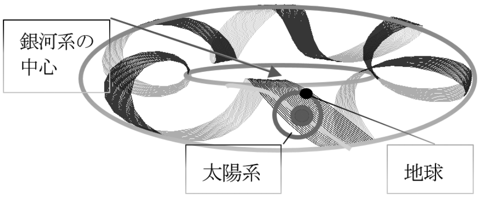

図 12　銀河系をまわる太陽系の移動想像図（駒野）

AL8　AL7 で固定していたものを動かして，新しい遊園地の乗り物の企画を立ててみよう。

（期待される例）原点 O をドーナツの周りに動かす , 3D で上下に動く（仮称：コーヒーカップアップダウン）…。

メリーゴーラウンドは素晴らしい教材になる。遊園地の周期ある乗り物の多くは 2 次元で表現できるが，メリーゴーラウンドは 3 次元である。‘見える化’の視点に立つとき，三角関数のグラフ $z=\cos kt$ をイメージし，理解するのに最も適したものとわかった。

詳しくは 11 月の日数教第 48 回秋期研究大会で発表する予定。

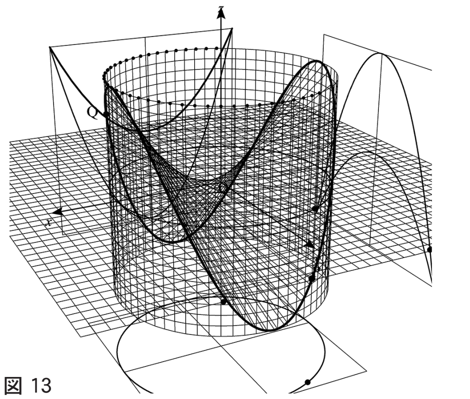

図 13

図 13 は，単位円周上を回る点とその点から上下に 2 回ずつ ±1 だけ変動する曲線を描く：

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\cos 2t \end{cases}$$

中 1 から高 3 まで使える教材である。

7．チャレンジする姿勢と新たな出会い

話し合って，自分一人では考え出せなかったこと，困ったら仲間（相棒）に活躍してもらうこと，説明しようとしたら自分がよく分かっていないことに気付いたなど，新たな自分との出会いが待っていると思う。一人でアイデアからモノ作りまですべてを行う必要はない。アイデアがあれば，相棒がそれをシミュレーションしてくれる。

アイデアを生み出す力が数学にはあるはず。生徒に「数学の授業で何を学んだ？」と聞いて，「覧古考新，次元をかえる，パラメータの増減，既存の組み合わせ（加減乗除），場合分けなど。新しいことを創りだす考え方を学びました」，と言ってくれたら凄く嬉しい。逆に，「2 次関数を学びました」という返答はちっとも嬉しくない。

参考文献

*1 10 Golden Lessons from Albert Einstein

*2 駒野誠（2010）絶対値は面白い - 方程式で図形ができる - 2010 年度数学教育学会春季発表論文集 pp. 10-12

*3 駒野誠（2014）周期ある風景　2014 年度数学教育学会春季発表論文集 pp.5-7

*4 The helical model-our solar system is a vortex.