



# じつきよう

## 数学資料

No. 70

### 大学教員の視点から

学習院大学理学部数学科教授 中島匠一

#### 1. はじめに

筆者は（いわゆる）「私立理系」の学部の数学科で数学を教えている。担当しているのは、いくつかの講義と卒業研究の指導（＝4年ゼミ）である。専門は代数学（特に、整数論）だが、必修の範囲では解析系の科目を担当することもある（今年は「複素関数入門」を教えている）。

この記事の執筆依頼をいただいたとき、せっかくの機会なので、高校での数学教育と大学での数学教育の橋渡しに寄与できる内容にしたいな、と考えた。しかし、具体的に書く内容を詰めていくと、だんだん話が「重く」なってきた。この記事は冊子の巻頭に載るそうなので、始めから「深刻な」話題になっては、読者に（編集者にも）申し訳ない。そこで、何とか「楽しい気分」が味わえるように、これまで私のゼミの学生が取り組んできた「数学実験」のテーマのご紹介も入れることにした。最初に、大学教員としての筆者の日ごろの感想を書かせていただくが、その後は、私のゼミの学生が取り組んだテーマの中から「 $3n+1$ 予想」と「平方数の和」について、学生の奮闘の結果を紹介したい。（ゼミのテーマは、他にも「楕円曲線」とか「素数分布」や「完全数」の周辺などいろいろある。）学生の努力にも関わ

らず残念ながら、「ゼミで何かの問題が解決した」という結果にはなっていないのだが、取り組んだ学生が（そして、筆者も）「数学を楽しんだ」とは感じていただけたと思う。

#### 2. 数学科教員の独り言

数学科で講義や学生の指導をしていると、つくづく「数学は積み重ねだなあ」と感じる。ある事柄が「定義」され、基本的な「定理」を学ぶと、その事柄の「応用」が発生する。すると、そこで生じた事態を受けて、新たなものが「定義」され、その性質を表す「定理」が述べられる。そこでまた新たな「応用」が生じて…、と、同じプロセスが繰り返されて、数学の内容が豊かになっていく。

このような「拡大再生産」のプロセスは数学（もっと一般に、自然科学）の発展の原動力であり、いわゆる「理科系」の学問の強みである。しかし、「積み上げ」によって高所に達するためには、下にある基礎をしっかりと学習する必要があるのは厳然たる事実である。数学科の学生の「積み上げ」プロセスへの対処を見てみると、彼ら（彼女ら）の対応がいくつかのレベルに分けられる。

まず、高校の数学に対する理解自体が不十分で基礎事項がマスターできていないタイプがある。

#### も く じ

##### 論説

大学教員の視点から…………… 1

##### 特集

複素数と複素数平面～授業の前に～…………… 5

##### 実践記録

数学教育の理念と教材開発…………… 9

##### 学校紹介

埼玉県立浦和工業高等学校…………… 13

##### ワンポイント教材

条件付き確率と乗法定理…………… 16

大学での講義は「高校の数学を前提にして、大学としての達成点を目指す」ものなので、このタイプに大学数学を理解してもらうのは、なかなか

「苦しい」。たとえば、極端な例だが、 $\sin \frac{\pi}{3}$  の値を「確信を持って」答えられない学生もいて、対処に困る（質問したら、(あいまいな) 記憶で何か値を答えてから、こちらの顔色を見ることで「正しいかどうか」を判定しようとする）。このような学生には、高校数学を復習してみることを（強く）勧めるのだが、なかなか実行してくれないのが現実である（「大学生になったのだから高校の教科書の勉強などできない」と言った学生もいた）。

次のタイプとして、高校の数学はきちんと理解できているのだが、大学で新しく登場する事柄をなかなか受け入れてくれない学生がいる。たとえば、高校で複素数平面を学ばなかった教育課程の学生は、大学で初めて複素数平面を学ぶことになるが、そこで登場する極表示になかなか馴染んでくれない。つまり、極表示を使えば簡単に解けるのが明らかである問題でも、どうしても「 $z=x+yi$  とおいて…」という方式しかとうとうしない学生がいる（もちろん、大抵は「ドツボ」にはまることになる）。これは「 $z=x+yi$  とおけば、解けた」という成功体験が強すぎて、新しく豊かな世界に入っていくことが阻害されていると考えられる。大学教員としては、このような場面で「高校でのトレーニングの強力さ」を感じる、とも言える。最近では学生の学力低下が話題になることも多いが、それでも、高校での（問題演習などの）トレーニングは有効で、学生は十分に「仕込まれた」状態で大学に入ってくる。大学では、それだけの「仕込み」のシステムができていない、のかもしれない。（大学側の言い訳になるかもしれないが、マンパワーの不足はどうにもならない；個人的には、大学入試に匹敵する「インセンティブ」がない、という事情が大きいと感じる。）

もちろん、「最善のタイプ」として、高校の数

学をよく理解していて、大学で学ぶ新しい内容も順調に消化してくれる学生はちゃんと存在している。このタイプが何人かいるだけで、講義をしていても楽しい。（本当はこういうタイプだけを相手にして大学の教育をしたいところだが、そうも言っていないのが残念である。）高校の数学は理解している、という「出発点」は前のタイプと同じであるが、大学での「伸び方」が違うわけである。両者の違いを考えてみると、「学び方」を知っているかどうかが違う、のではないと思われる。つまり、前者の「伸びが悪い」ほうは、「やるように指示されたことを（言われた通りに）ちゃんとやったから高校数学を理解した」のであり、後者の「伸びが良い」ほうは、「自分の学習の一環として、高校での指導を活用した」と言えるのではないだろうか（もちろん、程度の差はある）。これは「主体性の差」であるかもしれない。

学生を観察していると、主体性のある学習をして伸びが良い学生は「教科書以外の勉強」をしていることが多いように感じられる。具体的には、数学の歴史に興味があつて数学史や数学者に関する本を読んでいる、とか、フェルマー予想・双子素数予想・リーマン予想などの「進んだ数学」について知っていて、それが数学学習の「動機」になっている、などである。（個人的には、「できる学生」は、哲学について悩んでみたり、文学や歴史に親しんだりしていることが多いように見える。）そして、数学の学習に明確な「動機付け」をもっている学生は、中学・高校時代の先生から強い影響を受けていることが多いようである。

上にも述べたように、最後の「良くできる」タイプの学生は大学教員にとっての「オアシス」であり、やる気を起こさせてくれる存在である。しかし、彼ら（彼女ら）について残念なことは、「もっとたくさん勉強してきたほうがいいのに」と感じてしまうことである。せっかく、能力もありやる気もあるのだから、もっとガンガン教え込めばいくらでも吸収していきそうなのに、残念と言わざるを得ない（大袈裟な表現だが、「日本の国家的損失である」と感じる）。たとえば、「高校で微積

分を学ぶのだから（理系の学生には）微分方程式も教えてくれればいいのに」というのが、多くの数学者の感想である。もちろん、「他に教えるべきことがたくさんある」という事情はわかるのだが、昔は教えていたのだから今の学生にも理解できるはずである（現代の学生が昔の学生より（生物としての）能力が低い、などということはいえない）。それに、自分の学ぶことを「何に使うか」を知っていたほうが、「やる気」が出ると思うのだが…。

高校でも大学でも同じだろうが、熱心な学生を主眼に講義をすると「中堅以下」が付いてこれなくなってしまうし、「中堅」を対象にすると良くてできる学生が「放置」されて道に迷ってしまうこともおきる。講義をするときは真ん中（か、その下）くらいのレベルを「ターゲット」にせざるを得ないが、それでせつかくよくできる学生を「置き去り」にしては元も子もない。「さあどう対処したらよいか？」と、悩みは尽きない。この問題の解決は難しいのだが、一つの対処法として「卒業研究で、数学に主体的に関わる体験をしてみよう」と考えている。その取り組みの実例を次節で紹介したい。

### 3. 卒業研究の例 1: $3n+1$ 予想

最近では、自分のゼミでは数式処理ソフトを使った「数学実験」を行うことが多い（利用するソフトは、Maple）。ゼミの説明では学生にいろいろなテーマを提示するが、どの年も「 $3n+1$  予想」に強い興味を示す学生がかなりいる。「 $3n+1$  予想」は数学的に重要かと聞かれると肯定的には答えにくい、非常に素朴でありながら面白い（かつ、難しい）予想として、学生が魅力を感じるのかもしれない。

さて、「 $3n+1$  予想」は「コラッツ (Collatz) 予想」とか「角谷（かくたに）予想」と呼ばれることもあり、その内容は以下のである。自然数  $n$  に対して、

$$n \rightarrow \begin{cases} n/2 & (n \text{ が偶数}) \\ (3n+1)/2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

という操作を考える。（注： $n$  が奇数なら  $3n+1$  は偶数なので  $3n+1$  も 2 で割っておく。）このとき

「どんな自然数から出発しても、この操作を繰り返せば必ず 1 に到達する」というのが  $3n+1$  予想である。たとえば、 $n=7$  から出発すると

$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

という「人生」をたどって 1 に到達する。やっていることは小学生でもできる計算だけ（学生には、「小学生に計算練習をさせるのにちょうどいいでしょう」と言っている）なのに、このような単純できれいな性質が成り立ちそうだと、という点と、さらにそれが未解決だ、というのがこの予想の魅力だろう。

この予想を知った学生の中には、「よし、自分が解決して見せる」と張り切る人もいる。しかし、残念ながらその「野望」はすぐに挫折することになる（ある学生は、この状況で、「コラッツ予想」を「こらっ、強そう」と読み替えた）。とはいえ、何か新しい「視点」を導入すれば解決の助けになるかもしれない、という希望をもって、学生はいろいろな試みを行っている。たとえば、1 に到達するまでのステップ数を数えて統計的に分析してみたり、1 に到達するまでに数が増大から減少、減少から増大に転じる回数（グラフを描くと、山と谷の個数になる）を調べたりしたこともある。このような試みの中に、一つ「発見」といえるようなものがあつたので、ご紹介しよう。

$3n+1$  予想に出会うと「なぜ、 $3n+1$  ?」という疑問も生じる。ある年にこの疑問についてあれこれ計算したことがあつた。他の数値では「必ず 1 にたどり着く」というきれいな状況が生じないことは知っていたのだが、学生の探求心に従って実験をしてもらうことにしたのである。一人の女子学生（その年の紅一点）が、 $3n-1$  をやってみたい、と志願したので担当してもらった。この場合は、 $1 \rightarrow 1$  となるのはいいが先を少し計算してみると

$5 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 5$  や  $17 \rightarrow 25 \rightarrow 37 \rightarrow 55 \rightarrow 82 \rightarrow 41 \rightarrow 61 \rightarrow 91 \rightarrow 136 \rightarrow 68 \rightarrow 34 \rightarrow 17$

という「ループ」が生じてしまう。たいていはこの段階で「あ、これはダメだ」と思って計算をやめてしまう（私自身もそうだった）。しかし、その学生は自分で更に計算を続けて、「先生、ループは三つしか出てきません。これでいいんでしょうか？」と言ってきた。「ええっ、そんなことあるの？」となって、自分でもかなり計算をしたが、確かに学生の言う通りになっている（かなり広い範囲の自然数について計算したが、必ず三つのループのどれかにたどり着いた）。これは「 $3n-1$  予想」だ、ということで、他の学生も寄ってきてあれこれと実験をして盛り上がった。実験内容は三つのループのどれが一番頻繁に登場するか、とか、ループの入り口はどこが多いか、などいろいろである。また、「別方向」の実験で、「 $3n+a$  予想」というのもありそうだという話も出てきた（ $a$  はある条件を満たす整数）。これらは（あくまでも）「数値実験」であって、何も証明はされていない。しかし、「実験」としては面白い結果だと思うので、近いうちにどこかで発表させていただきたいと考えている（この手の話題がお好きな方は、ご期待ください）。

#### 4. 卒業研究の例 2：平方数の和

整数の平方（＝2乗）である整数を平方数とよぶ。つまり、平方数は

$$0, 1, 4, 9, 16, \dots$$

という列をなしている。（注：0を平方数の仲間に入れる流儀と入れない流儀がある。ここでは、0も平方数と見なすことにする。）「平方数」という言葉は小学校か中学校で登場するかもしれないが、高校までの数学だけでは目覚ましい結果は証明できないだろう。しかし、大学の数学を応用すれば、学生が目を見せるような結果を出すことができる。たとえば、（フーリエ解析や複素関数論を利用して導かれる）等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

は、明らかに「すごいこと」に見えるだろう。

平方数についての「素朴な」数学は、現代では

「2次形式をめぐる数学」として大発展している。とはいえ、ここで「2次形式とは」という一般論の講釈を始めてしまうと、学生がついてきてくれない。そこで、学生には、「素朴だが自明でない成果」として

**ラグランジュの定理** 任意の自然数は四つの平方数の和として表される。

を紹介する。大学4年生になるまでこの結果を知らないのは残念なことだ、と思えてならないが、まあ、それはともかく、多くの学生は「ラグランジュの定理」に強い興味を示してくれる。ラグランジュの定理は初等的に証明できるが、証明を追いかけるだけではつまらないので、卒業研究では「解の個数」について調べてもらうことが多い。実は、「ヤコビの定理」というものがある、自然数  $n$  に対して、等式

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

をみたす整数  $x, y, z, w$  の個数は「4で割れない  $n$  の約数の和の8倍」であることがわかっている。（注：複素関数論を応用すればヤコビの定理は証明できるが、実際は、かなり難しい。）しかし、解に条件  $x \geq y \geq z \geq w \geq 0$  を加えたりすると、解の総数は簡単には表せない。そこで、卒業研究では、いろいろな条件を加えた「4平方数の和」の解の個数を調べてもらうわけである。スペースの関係でここでは紹介できないが、学生は自分でプログラムを書いて解の個数を求めて、それをグラフに表したりして、自分なりの「成果」を見つけ出すことが多い。このようなことから、「自分で手を動かすこと」の大切さが、改めて実感されるのである。