複素数と複素数平面　～授業の前に～

複素数を教えるにあたり，いくつかの場面で理解してもらう困難さを経験する。本稿ではそのうちのはじめの三つを紹介する。まずは複素数は単なる原点を基点とする位置ベクトルであるということ，不思議さや神秘性など考える必要はない。次になぜ複素数に積が定められたかということ，これも理由がはっきりしている。第三に，複素数に関する記号が煩雑でうんざりする。特に馴染めないという偏角の記号 arg について応用の例を挙げる。

海城中学校高等学校　大和澄夫

複素数の定義

実数 a と b の組を用い，$i^2=-1$ という規約をもった“i”についての一次式

$$a+bi$$

を，単位 1 と i を二つもつという意味で**複素数** (complex numbers) と名づける。a と bi の間にある記号 + の意味はあまり深刻に考える必要はない。単なる記号 x についての一次式 $a+bx$ の + と同じである。単に二項をまとめて考える，もしくは and の意味である。この段階では $i^2=-1$ は積とはいえない。i という記号の定義である。これを用いて複素数の積が妥当に定義される（well defined）のである。

実数部分が 0 である複素数 $yi(y\neq 0)$ を**純虚数**という。

複素数の相等の定義

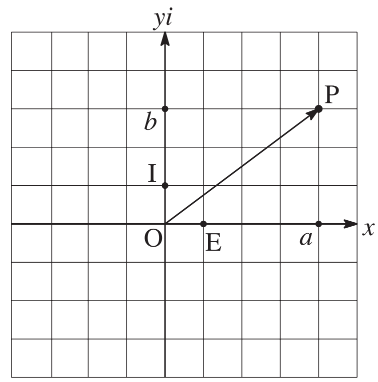
二つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ が等しいことを i についての二つの一次式の相等の定義を用い

$$a+bi=c+di \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a=c \wedge b=d$$

と定める。これによって，実数を $a+0i$，純虚数を $0+bi$ と考えると，これらにも和を定めることができる。

複素数平面の定義

平面に，二本の直交する直線をとり，交点を原点 O とし，いずれも実数を目盛る。一方を**実数軸**（x 軸）と名づけ，単位を OE とし，直線上の点を OE の実数倍で表す。これに直交する方を**虚数軸**（yi 軸）と名づけ，単位を OI とし，直線上の点を OI の実数倍で表す。ただし，長さは OE = OI とし，単位 OE は無視，OI は記号 i で表す。複素数 $a+bi$ を平面上の点 $\mathrm{P}(a\ ,\ b)$ と同一視して平面上に表す。このようにして，各点を複素数として表された平面を**複素数平面**という。



ここまで準備すると，$a+bi$ の + は，二つのベクトル $a\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と $b\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ の和（長方形の対角線）という意味づけができる。

原点 O と点 P の距離

$$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$$

を**絶対値**といい r で表し，$r\neq 0$ のとき $\left(\dfrac{a}{r}\ ,\ \dfrac{b}{r}\right)$ を向きと定めると，複素数は大きさ（絶対値）と向きをもった原点を基点とする**位置ベクトル**と考えることができる。

複素数の演算

この複素数を i に対する一次式と見なし，和（差）と積を定める。和は通常のベクトルとしての和でもある。実数と複素数との積も一次式やベクトルの場合と同様である。この段階までは複素数を i を用いて表すことの利点はなにもない。敢えて i についての一次式などにせずともよい。点の座標で表されたベクトルと変わりはない。実際オイラーなどの先人たちも，はじめはそのように表していたようである。複素数どうしの積は一次式の積に $i^2=-1$ との規約を定め

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

となったかをオイラーの著作から考えてみる。その著書「無限解析」の第８章“円から生じる超越量”で，z を実数とするとき，等式

$$(\sin z)^2+(\cos z)^2=1$$

の左辺の

$$\left(\cos z+\sqrt{-1}\sin z\right)\left(\cos z-\sqrt{-1}\sin z\right)=1$$

という因数分解を行った。元本を読んでもらうしかないが，de Moivre の定理に言及し，なんと三角関数の実数変数 z による級数展開まで作り出している。この x^2+y^2 を和と差の積に因数分解する場合 $i^2=-1$ という記号 i を用いる利便性に気づき

$$x^2+y^2=(x+yi)(x-yi)$$

という等式が成立し，i についての一次式である複素数に我々の馴染みの積の構造を構築することができたのである。

複素数平面の構築と複素数の積に回転という意味をもたせた経緯を次に解説する。

複素数平面の誕生

数学の多くの分野は“超”と言われている天才の開拓する部分がたくさんある。複素数平面または複素平面を**ガウス平面**とも，そして複素数の絶対値と偏角を用いての表現法，極形式を**オイラー形式**ともいう。ガウス（1777-1855）もオイラー（1707-1783）も超天才であることを誰も否定しない。これらの人たちが複素数を数学に取り入れ，大きな成果を出したことも知られている。しかし，実際には複素数平面の構成には数学の歴史から忘れ去られたような人たちが関与している。しかも，彼らは専門の数学者ですらない。数学の歴史の霞のベールに覆われた人の幽かな光を感じることは数学を幾分身近なものと感じる助けになるのでは。

〇ヴェッセル（CasperWessel : 1745-1818 ノールウエイ）の着想

リュウマチのため測量技師としての実務を引退した後に研究を行ったといわれている。ヴェッセルが考えた複素数の“**偏角**”の概念に至ったであろう経緯を辿ってみる。

複素数を $\alpha=4+3i$ とする。この複素数を何回か掛けると

$$\alpha^5=(4+3i)^5=-3116-237i$$

実数部分に比べて虚数部分の係数の絶対値が小さく，α^5 は殆ど負の実数とみなせる。実際，

$\dfrac{237}{3116}\fallingdotseq 0.076$ である。ここで複素数 α が実数直線の正の部分とある角度 θ をもつと仮定。5 回掛けると約 180° になることから

$$5\times\theta\fallingdotseq 180^\circ \quad \therefore\ \theta\fallingdotseq 36^\circ$$

と考えることができる。$\alpha=4+3i$ を平面上の点と同一視を行い $(4\ ,\ 3)$ とし，原点と結んでその方向（余弦）を求めると，x 軸方向は $\dfrac{4}{5}$，y 軸方向は $\dfrac{3}{5}$ で

$$\cos 36^\circ\fallingdotseq 0.8090\ ,\quad \sin 36^\circ\fallingdotseq 0.5878$$

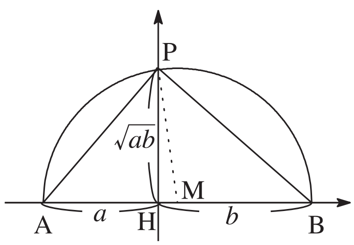
である。既にヴェッセルは，原点を始点とする位置ベクトルとして複素数の加法，減法，実数倍を平面上の線分図として表現していた。ここで，複素数の乗法も平面上の点の回転として表現可能であることの確証を得た。そして，原点と複素数を結んだ線分と x 軸の正の部分とのなす角を**偏角**と名づけた。このアイデアを 1799 年に論文として発表したが，1895 年の再発見まで忘れ去られていた。

〇アルガン（Jean Robert Argand : 1768-1822 スイス）の発想

アルガンは，パリで簿記の仕事をしていた。1777 年に初めてオイラーが論文で虚数単位 i を用いたことがわかっているので，アルガンは i を知っていたと思われる。1806 年に自分の名前を記せず冊子で，通常の実数を横軸の x 軸に，その鉛直方向の y 軸の単位の長さの位置に虚数単位を目盛り，複素数平面を構成し，原点と平面上の点の距離として複素数の**絶対値**の概念を発表した。直接アルガンの冊子を参照できないが，相乗平均（平方根）の作図から複素数平面を構成の確証を得たと言われている。

二つの 0 でない正の実数 a，b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ は，平均を求める二つの数を載せた数直線と直交した直線上に作図できる。点 P は線分 AB の点 H での垂線と，線分 AB の中点 M を中心とし，線分 AB を直径とする半円との交点である。このとき，二つの直角三角形△AHP と△PHB の相似比を考えれば直ちに説明ができる。

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は，根号の中身を $(-1)\times 1$ と見なせば，形式的に 1 と -1 の相乗平均と考えることができそうだ，という発想が生まれたのだろう。



したがって，虚数単位を -1 と 1 が載っている実数軸に垂直な直線上に目盛れるのでは，と考えたのだと思う。

アルガンの埋もれていた冊子を発見した人は砲術の研究者で鉛直方向の運動に興味をもっており，複素数の幾何的解釈を何人かの数学者に紹介した。しかし世に出たのは数学者ルジャンドルの書簡にこの冊子が参照の形で掲載されていたのが発見され，1813 年に発表されてからだという。

なぜ，複素数に積が定義されたのか，ではなく，平面上の点の回転と関連のある積を構築したいために複素数が考えられ，それを表現するため複素数平面が生まれたのである。

使用する文字や記号についてと少しの話題

複素数平面上の複素数は，アルファベットの z やギリシア文字を用い，複素数を表す点と原点が始点，その点が終点の位置ベクトルを同一視する。

$$z=a+bi=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a\ ,\ b) \qquad (a\ ,\ b\in\mathbf{R})$$

複素数 z の絶対値を $r=|z|=\mathrm{abs}(z)$ と表す。$r\neq 0$ のとき，z の方向余弦を用い，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ とする。θ を**偏角**といい

$$\theta=\arg(z)=\arg z$$

などと表す。これから複素数の**極形式（オイラー形式）**が得られる。

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

そして，複素数の積 z_1z_2 について，三角関数の加法定理を考えれば

$$\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$$

のように，記号 arg について対数の和と同等な性質をみたすことも証明できる。n を任意の整数とするとき，数学的帰納法を用いて，次の de Moivre の定理の成立を証明できる。

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

〇ドゥモアヴル（Abraham de Moivre, 1667-1754 フランス）イギリス風にはデモイヴ。1685 年のルイ 14 世によるナントの勅令の廃止後，プロテスタントとしての弾圧に遭い，二年間の投獄のあと 1688 年イギリスに渡る。確率論に業績がある。ニュウトンの良き理解者としても有名。ニュウトンも複雑な問題に出会うと「これは，デモイヴ氏に訊くように」といっていたらしい。数学はまったくの独学であったという。

（1）円周率を表す公式

複素数を$z=a+bi\left(a\neq 0\right)$と表すとき，偏角 θ は逆正接関数によって

$$\theta=\arg z=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

として得られる。ただし，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$とする。

微分法の教科書を参照してもらわないとならないが，この範囲で逆正接関数は次のように級数展開される。まず，次の分数関数を展開する。

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

この級数の収束半径は$\left|x\right|<1$である。関数$\frac{1}{1+x^2}$の原始関数のひとつが $\tan^{-1}x$ であり，右辺の項別積分は収束し，左辺の積分に一致する。

$$\therefore\ \tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$

この級数は $x=1$ のとき，$a_n=\frac{1}{2n-1}$ とすると，

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ なので，交代級数の収束条件をみたし，収束する。

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

これを用いて π の近似値を求めてみると，$n=100$ 即ち，分母が 199 になるまで加えても

$$3.13159290\cdots$$

と収束が遅い。

そこで，arg の対数性とヴェッセルの複素数の偏角の発想から，次の例のように積や累乗の工夫をして収束の速い級数を見つけることができる。

$$\left(2+i\right)\left(3+i\right)=5+5i$$

$$\arg\left(2+i\right)+\arg\left(3+i\right)=\arg\left(5+5i\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}\ \text{（オイラーの公式）}$$

$$\left(5+i\right)^4\left(-239+i\right)=-114244\left(1+i\right)$$

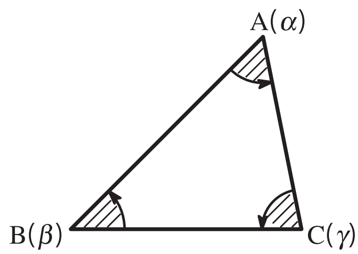
$$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}\ \text{（マチンの公式）}$$

次のラザフォードの公式はどのようにして得られるのだろう。

$$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$$

（2）不思議：三角形の内角の和

複素数平面上の異なる三点 α，β，γ が頂点を α とする $\angle\beta\alpha\gamma$ をなすとき，この角の大きさは複素数の商 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角の大きさである。



記号 arg の対数性から

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}+\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$$

$$=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\arg\left(-1\right)=\pi$$

最後に

現在のような形で複素数平面や i を用いた複素数の表記が直ちに用いられたのではない。その経緯を多少でも知ることは，今ある疑問を和らげる手助けになるのではないか。数学は独自に勝手に進化したものではない。人間の様々な活動のなかから，やむにやまれぬ必要性から生まれたものも多い。厳密化は本質の理解の助けになるとは限らない。オイラーをはじめ，先人の発想の豊かさ大らかさへの感動の方が大きい。文化の香りのしないカリキュラムや公式だけで数学が理解できるかは疑問である。

参考文献

1. 数学の歴史　Victor J.Katz　共立出版
2. 解析入門　田島一郎　岩波全書
3. オイラーの無限解析　高瀬正仁訳　海鳴社