実践記録

数学教育の理念と教材開発

早稲田大学客員教授　駒野誠

1．理念と目標

学校での数学科指導を示唆する重要なヒントが昭和26年の中学校高等学校学習指導要領（試案)[1]と昭和31年の中心概念の作成過程[2]の議論にある。

前者では,「数学科の指導は『数学を』教えるのではなく，数学で『生徒を』教育していくことであるといえよう」とし，また，後者の中心概念の考え方では,「概念の数は，いつも頭においておけるくらいの少数のものでなければならない。また，その概念は，いくつもの性質の異なった問題に，体系的になんども現れてくるようなものでなければならない」としている。これらに対して，長い現場経験と日々の研究手帳に基づいてやっとたどり着いた一つの回答を紹介したい：

○数学教育の理念（2001 駒野）

「数学学習では,『無限をいかに掴むか』について学習するが，その学習過程において，今までの自分にない新しい概念や認識を獲得し，明日の新しい自分の創造に資するものである。」

○数学教育の目的（2012 駒野）

「数学学習は,‘かぞえる’,‘くらべる’,‘はかる’,‘かえる’を主題として学習する過程において，思考空間の広がりと分類で，新しい概念や認識の獲得が可能になる考える力を養い，明日の豊かな社会の創造に貢献することを目指す。」

これらには,‘数学’という言葉を最初以外に用いていない。‘数学’を別な言葉で表現する努力をしてきた思いがある。「無限を掴む」という言葉を生み出したことで，教材もパターン学習から根本は何かを求める事前教材研究へとパラダイムシフトができた。事前という意味は，布石と実践によるスパイラルな流れの数学探究活動である。

2．人間数学

「数学」という名を知らない人はいないが，イメージするところは，中学・高等学校での‘数学’であると思われる。学習指導要領に記述されている‘数学’も中・高の限定範囲の‘数学’であると考えられる。また，巷で，数学は暗記科目である，と言われるのは，受験科目としての‘数学’であろう。では,「数学」とはなんだろうか。

「数学」を20字以内で紹介せよ，と言われたらなんと返答するだろう。よく見るのが,「数学とは，数と図形の学問である。」などの静的な表現であるが，これでは自ら足を踏み出して数学しようとは思わない。そこで，願望も込めて少なくとも動的な表現であるべきと考えたのが,

「数学とは，モノに数を付す学問である。」

数を付すとは関数を創ると言い換えてもよい。言い換えれば，数は作用素であると。まわりの教科を見渡すと，理科はモノに実験・観察を付け，国語はモノに言葉を付け，音楽はモノに音とリズムを付ける。学校教育ではそれぞれモノの側面を能動的に捉える方法を持ち合わせているようである。もっと言えば,「数学」はモノの側面（属性）に潜む規則性・関係性を見出し，だれでも混乱なく再現できるように，定義して数を付けることで，そのモノを深く理解すると同時に，そのモノの周辺にある無限のモノたちを有限で処理できるようにすることで，結果として人類の幸せに貢献する学問,‘人間数学’である。その重要な概念は,「1次独立」と「同値類」である。

貢献とは大げさなようだが，数学では多くの定

理・公式が発見されていても発明とは言われない。新定理の論文発表者に特許権はないのである。これはすべての人に対して開かれていることの証明である。工学の特許や小説・音楽などの著作権とは大きく異なる。「数学教育の理念」とgoogleで検索すると，160万件出るうちの2番目に筆者の定義があるが，多くの方々にも理念をご披露していただきたい。理念があって，初めて教材に魂が入る。テキストにあるからそれを指導するものではない。

「数学」は異なるように見える複雑なモノたちを単純化し，理解したい願望を満たしてくれる。モノたちの何かに疑問を持ち気が付くことができたか。規則性・関係性に気が付いたら，それが正しいと証明できるか。また，その証明に必要な概念を創り出すこと，これは人の個性のある作業であると思われる。「数学」がおしゃべりする言葉は式（sentence）である。しかし，式は無言であるので，生徒にわかるように翻訳し視覚化するなど表現を工夫することも学校教育では欠かせない。視覚化にはグラフや図や表がある。生徒が中・高での‘数学’を思考し，対話するには，数や式を用いられるとよい。‘数学’と対話するために，式やグラフや表などを駆使してコミュニケーションできるような生徒を育てたい。その意味で，学校は‘しゃべり場’である。翻訳作業は容易ではないが，教師がよりよいものを生徒に提供すべく教材研究する他ない。

3．中高での‘数学’学習

（1）数学で学ぶこと

数学の学習は，経験から‘かぞえる’,‘くらべる’,‘はかる’,‘かえる’の四つに絞ることができ，それらの概念を掴むことで新たな創造が期待できることがわかってきた。

中・高の‘数学’での章・節の数学用語による項目分類は便宜上のものであり，それが教えたい中心概念ではない。根本を理解させることが重要である。アルゴリズムを覚えての計算習熟が最終目標ではない。たとえば，広がりにどのようにして数を付けて‘面積’と呼ばれるものにするのか。面積積分計算がいくらできてもフリーソフトWolfram-Alphaにはかなわない。

具体的開発教材

‘かぞえる’（くらべる）…‘かぞえる’ことは関数を創ること。樹形図を利用して漸化式を求める関数方程式を創る。

‘はかる’（くらべる）…「カバリエリの原理」を用いて面積を求める…はかる平面升を創り，くらべることで面積の大きさを求める。

‘くらべる’…変化するものの大小をくらべる関数（Max/Min関数）で視覚化する。‘くらべる’には‘相棒’が必要である。

‘かえる’…立場を‘かえる’ことで，モノがよく見えるようになる。主役と脇役の交代でもある。また，基準を‘かえる’ことの見方も大切にしたい。

（2）覧古考新

既に学んだことをよくよく観ることで，新たなことに正対する構えを「覧古考新」ということにする。学年間，科目間，テキストの行間・章間などのリンクを探究することで，それらの源泉を見出す努力をすることが授業者の姿勢である。

生徒に学校・家庭などで多くのことを学ばせるが，実はそれらがどのようにつながっているのかの関係性を見抜く視点がないと「数学は暗記科目だ」という「数学」が受験科目としての‘数学’という狭い意味のものになる。覚えて上手に吐き出すことを訓練することに高度情報化社会では価値を見出さない。学習した源泉を突き止めることが創造性の鍵となる。

4．‘数学’の教材開発

大学での講義と異なり，中・高での授業では生徒に新たな障害物に直面させる材料を提供するのが教師である。数学するには,「覧古考新」と「加減乗除」で創造的な活動ができるものと考える。

小さなハードルのときに布石を打っておくことで，生徒はそのことが頭の片隅に印象として残っていて，新たなコトにも創造性を発揮し，自力で

解決してくれることを期待する。当然ながら教材開発も同じである。

筆者の使っている独特な用語を紹介する。それは‘相棒’（パートナー）と‘変身’である。これら二つは思考空間（思考する場）での柔軟剤のような活躍をする。思考対象だけだと息詰まることが多いが，くらべる‘相棒’がいれば先に進む可能性が広がる。

ここまで抽象的な理念・信念が続いたので，筆者が教材開発してきた具体的なものをご紹介する。「覧古考新」を頭に浮かべると，(学年は学習指導要領配当)中２の１次関数 $y=bx+c$，中３の２次に比例する関数 $y=ax^2$ と学ぶ。しかし，高校に入ると，高１で２次関数 $y=ax^2+bx+c$ を全くの別物のごとく扱う。式が訴えている情報をキャッチすることなく「平方完成」へと突っ走る。‘天下り’はここでも問題である。$y=ax^2$ と $y=bx+c$ とから $y=ax^2+bx+c$ が創られていることを見逃している。‘相棒’が自分の式に埋まっている（「青い鳥」のようだ）。これは 1995 年に「2 次関数グラフの構造」として，夏の日数教で発表した。当時，関数の和の概念がなく，考え出すのに年月がかかった苦労を思い出す。微分を知らなくてもいろいろなことができるのである。

学校数学で扱われている教材は「ベクトル空間」の話が多い。「加減乗除」をどのように取り扱うのか。計算の検証だけでなく生徒が自力で加減乗除によって新たな世界を創り出すことを学ばせたい。

従来，別解の重要性が言われてきたが，筆者の教材開発はそれと方向性がちょっと異なり，コトの源泉を見出すことに力点をおく。つまり，個々の問題固有の別解よりも，それらを止揚し鳥瞰し，無限を掴むような，一つわかれば That's All 的な姿勢である。

$\boxed{\text{Q1(1)}}$ $y=2x^2$ 上の点 $(1,2)$ での接線の式を，微分を用いずに求めよ。

微分を学習していない場合，$y=m(x-1)+2$ と連立させ，重解をもつ m を見つける。しかし，次のように式の‘変身’によれば，内部に接線の‘卵’が内包されていることが見えてくる。

$$y=2(\overline{x-1}+1)^2=2(x-1)^2+4(x-1)+2$$

$y=4(x-1)+2$ が求める接線である。

一言でいえば，テーラー展開であるが，多項式関数ならば，n 次関数でも多変数関数でも同様にできる。二項定理が源泉とわかる。

$\boxed{\text{Q1(2)}}$ $y=x^3$ 上の点 $(2,8)$ での接線の式を，微分を用いずに求めよ。

3 次の判別式を使わずに，微分を用いないと求められないと思われるが，Q1(1) と同様にして，

$y=(\overline{x-2}+2)^3=(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8$

$y=12(x-2)+8$ が求める接線である。

このように見てくると，「数学Ⅱ」での微分は何を目的としているのだろうか。その心は微小な変化によってできる式（微分方程式）が重要である。

$\boxed{\text{Q2}}$ $y=(x-1)(x-5)$ の頂点の座標を求めよ。

展開する解答が多いと予想される。しかし，

$$y=(\overline{x-3}+2)(\overline{x-3}-2)=(x-3)^2-4$$

と（平均の２乗）−（ずれの２乗）と‘変身’できる。このように源泉を見出すと，

$\boxed{\text{Q3}}$ $(x^2-2x-1)(x^2-2x-5)+4$ を因数分解せよ。

置き換えでなく，平均を考えれば，

$$(x^2-2x-3)^2=(x+1)^2(x-3)^2$$

これらの指導は，整数から始めるのがよい。

$$15^2=1\times225=113^2-112^2$$
$$15^2=3\times75=39^2-36^2$$
$$15^2=5\times45=25^2-20^2$$
$$15^2=9\times25=17^2-8^2$$

すると，ピタゴラス数を次々と見つけることができる。

$\boxed{\text{Q4}}$ $y=(x-1)(x-2)(x-6)+x+6$ の極大値・極小値を求めよ。

$x-1,\ x-2,\ x-6$ の三つの平均は $x-3$ であり，

$$f(x)=(\overline{x-3}+2)(\overline{x-3}+1)(\overline{x-3}-3)+(x-3)+9$$
$$=(x-3)^3-6(x-3)+3 \qquad \cdots①$$

変曲点を通過する接線 $y=-6(x-3)+3$ を内包。

この①を微分して，$f'(x)=3(x-3)^2-6$

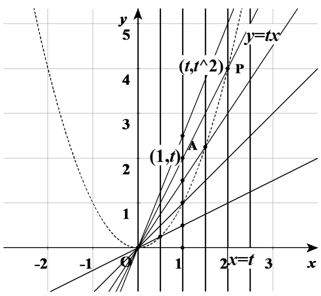
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-3=\pm\sqrt{2}$　これを①に代入すれば，

$$f(\pm\sqrt{2})=(\pm\sqrt{2})^3-6(\pm\sqrt{2})+3=3\mp4\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ 「覧古考新」によって，$y=x^2$ のグラフをそれ以前に学習した，1 次関数を用いて描き表すことができないものか。

通常，グラフは $\{(x,\ y)|y=x^2\}$ $\cdots *$ のような表現方法をする。しかし，これでは点が生きていない。「極意は，点は交点なり」である。

$\{(t,\ t^2)|x=t, y=tx\}$ とできる。

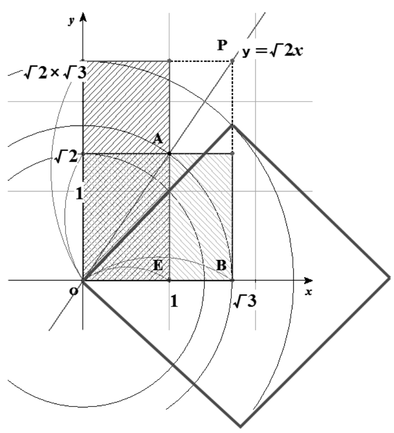


これは，２直線 $x=t$，$y=tx$ の交点の軌跡である。$y=tx^2$ を用いて，$y=x^3$ も $\{(t,\ t^3)|x=t, y=tx^2\}$ とでき，シミュレーション可能になる。

$\boxed{\text{Q6}}$ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ はどんな数なのか。

$x^2=\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)^2=6$ で，$x>0$ だから

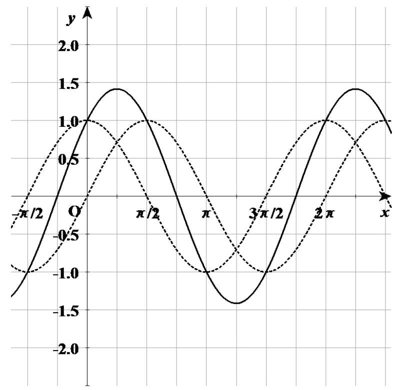
$x=\sqrt{6}$ ゆえに，$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ とするのは面白くない。これを，$y=\sqrt{2}x$ という比例関数で考える。この図で $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ を示せる。



$\boxed{\text{Q7}}$ $y=\sin x+\cos x$ は合成の前に何をするか。

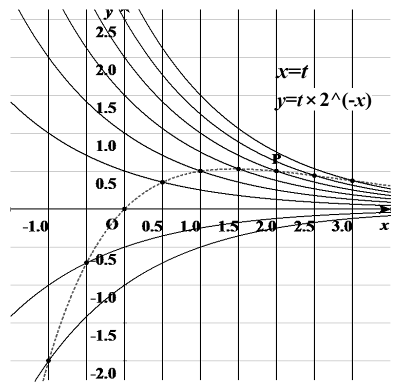
基本のグラフ $y=\sin x$，$y=\cos x$ を学習したのち，加減乗除の和 $y=\sin x+\cos x$ が出現する。これを「覧古考新」を無視して合成に先走っては暗記科目に堕してしまう。2 次関数での，「関数の和」が布石になっている。

周期 2π より，$y=a\sin(x+\alpha)$ と予想でき，$(0,\ 1)$，$\left(\dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$ を通過するので，$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と決定でき，加法定理で，$y=\sin x+\cos x$ と確認。その後，合成方法へと進む。



$\boxed{\text{Q8}}$ $y=x2^{-x}$ のグラフを「覧古考新」で，微分の増減表なしに描いてみよう。

グラフは点 $(t,\ t2^{-t})$ の集合である。この点は，$x=t$，$y=t2^{-x}$ の交点である。



５．研究手帳

思いついたことを書き留める。自宅を出れば，至る所で手帳を取り出し眺め，図を描いたり計算したりする。「電車はアイデアのゆりかご」である。

参考文献

１）昭和 26 年学習指導要領数学科編（試案）改訂版（Web 上の「学習指導要領データベース」）

２）長崎栄三「高等学校学習指導要領数学科編 昭和 31 年度改定版の作成過程とその後」昭和 25 年 3 月（Web 上で公開されている）