

紙を折って数理を楽しむオリガミクス（その2）

—任意に1回折って、何角形？—

芳賀サイエンスラボ所長（元筑波大学教授，理学博士） 芳賀和夫

◇ひと味ちがう折り方

売り場に並ぶおりがみ^{*1}は、表面に色がついている正方形で、裏面は白のままになっている。これで動物や花や家具や乗り物などの形を作るわけだが、このおりがみを使って作品作りではなく数理遊びをしてみようと思いついたのは、私の性格による。ときどき、他人とちがう視点で何かをしてみようとするすることがあり、おりがみを手にしたときに、何かの形に似せた物を折ることを目的にせず、任意に折ってみたら、意外に興味深い事象があることに気づいたというわけである。いわば、ひと味ちがう折り紙遊びである。本職だった生物学の分野でも、この、ひと味ちがう考え方が役立つことがしばしばあった。

以下に紹介するテーマなどで、事象の発見と数理を楽しむうちに、自分のやっている事柄は、おりがみを使いながら折り紙遊びとは異なる範疇の用語にした方がよいと考え、1994年に開催された第2回折紙の科学国際集会で「オリガミクス Origamix」という用語を提唱した。日本語起原の origami は世界語になっているので、それに数学 mathematics の語尾をつけた新語である。本稿の表題にもなっているこのオリガミクスは、提唱以来20年を経ている、著書も和文3冊に英訳と露訳が出版されているにもかかわらず、あまり一般には流通していない。それはすでに origamic という別事象の語があり、その複数形と紛らわしいという指摘もあり、日本語でもオリガミクスは〈…ミックス〉にならないよう注意している。

^{*1} ひらがなの「おりがみ」は正方形の紙素材を指す。一方、漢字まじりの「折り紙」や「折紙」は、概念や行為、あるいは作品を表す用語として使い分けている。売り場に並ぶ商品名はたいていひらがなになっている。

◇任意に1回折ってみる

折り紙遊びでは、向かい合う辺と辺を合わせて長方形に二つ折りするか、隣合う辺と辺を合わせて三角形になるように二つ折りするかのいずれかを最初の折り方とする（図1）。一意に決まる折り方はこの二通りしかないのに、伝承の折り紙としては当然のことである。この折り方で、縦と横の中線と2方向の対角線の計4本の折り線^{*2}がつくので、私はこれらを「一次折り線」と呼ぶことにしている（図2）。

そこで、最初の折り方をひと味ちがえてみる。この一次折り線の折り方にならないように、任意におりがみを1回折ってみるのだ。もちろん非対称になってしまうから作品にはなりにくいし、折り方自体を他人に伝えにくくなる。でも、私はこの任意の1回折りをもとにずいぶん数理を楽しむことができ、今でも新しい課題に気づくことがある。任意の楽しみ(?)である。

今回は、任意の1回折りから始まるオリガミクスの課題のうちの1題を紹介することにしよう。

^{*2} 通常の折り紙では「折り筋」といっているが、オリガミクスでは「折り線」と呼ぶ。

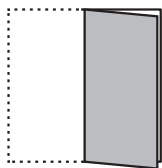


図1 おりがみの最初の折り方

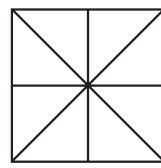
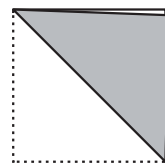


図2 一次折り線

◇まず、折ってみる

通常の折り紙遊びの場合と同じように、おりがみは色のついた面を裏、白い面を表にして机上に置き、大きさも方向も任意に1回折ると色の面の一部が表に出てくる(図3)。授業や講座で、それぞれが任意に折ったものを一斉に提示してもらうと、一見、ばらばらでまとめようがないように見えるが、それらは2群に分類することができる。出てきた色の面(折り返し片と呼ぶ)は大きくても小さくても、太っていてもやせていても、かどが三つあれば三角形、四つあれば四角形である。

三角になった人は四角に、四角になった人は三角に、それぞれ折り直して、どのように折れば三角になり、どのように折れば四角になるのかを考える。おりがみは正方形だから、かど(頂点)が四つある。紙を折るとかどが動く。動いたかどが一つの場合は三角に、二つの場合は四角になる。こんな簡単なことなのに、気づくのに時間が掛かる人も多い。おりがみがくしゃくしゃになるまで、ひとしきり、いろいろな方向、いろいろな大きさに三角、四角を作ってみる。

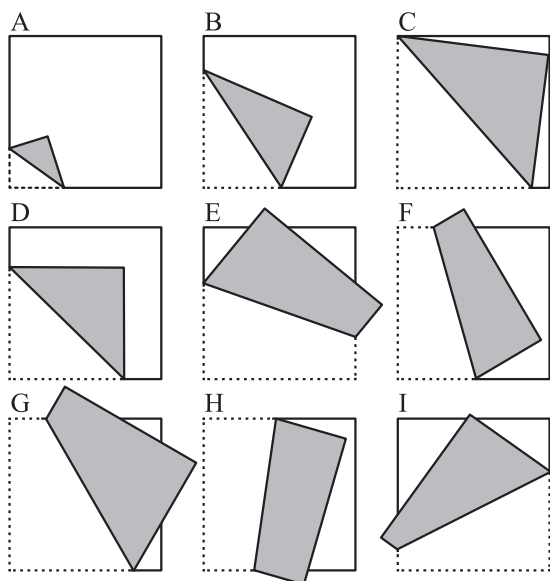


図3 任意に1回折る
折り返し片はA～Dが三角形、E～Iは四角形

◇3丁目と4丁目

おりがみの正方形の四つあるかど(頂点)の一つ、左下のかどにしるしをつける。小さい直角二等辺三角形になるように塗りつぶすとよい(図4)。紙を折ったときにも、そこが分かるように裏側にも同様のしるしをつけておく。このコーナーを「主頂点」と呼ぶことにする。紙を折るときに、主頂点を動かして折るようにする。左下というのは、おりがみに座標軸を設定するときの原点の位置に当たる。

まず、主頂点をおりがみの内部に動かして三角、四角を作る。ハンズオン教材としては、おりがみの全面に鉛筆でランダムに20個程度の点を打ち、その一つ一つに主頂点を移動させて紙を折った場合に、三角になるか四角になるかを確認して、三角は赤、四角は青というようにやや大きめの点で色分けしていくとよい。

つまり、おりがみの面に地図がかくされていて、3丁目と4丁目があり、主頂点が3丁目に行けば折り返し片は三角になり、4丁目に行けば四角になると考えるのである。20個の点では3丁目と4丁目はおぼろげな区画として浮かぶだけで、その境界は分からない。

3丁目と4丁目の境界を明らかにするには、さらにランダムな点を増やすか、おりがみに縦、横1cmなど等間隔の格子線を引き、縦横の交点を根気よく調べていく方法(図5)もある。

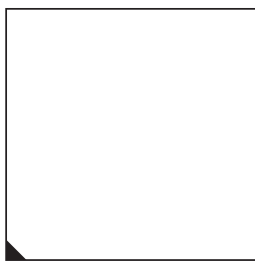


図4 左下に主頂点マーク

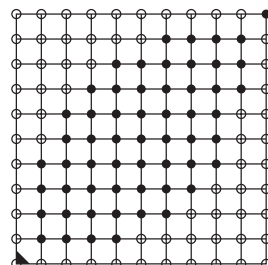


図5 格子の交点を調べる
○は四角形、●は三角形

◇紙内町の地図

このような作業をする一方、理詰めで境界を知ろうという気も起きるに違いない。おりがみ自体

は、折りを繰り返すので折り線だらけになってしまふ。そこで、清書用の紙を用意しておく。最もよく売られているおりがみは1辺が15cmのものである。これでもよいが、1辺が11.8cmの小振りのおりがみが手に入れば、その方がコンパスは使いやすい。

いずれにしろ、A4用紙におりがみと同形の正方形を描いて、それに地図を作る。主頂点を3丁目に移動させるときは、おりがみの他の3頂点は原位置のまま動かないので、折り返し片は三角である。しかし、4丁目に移動させると、右隣か上隣かのどちらかの頂点が動いて、折り返し片は四角になる。隣の頂点が動くか動かないかが境界を決めているので、隣の頂点が中心で半径がおりがみの1辺の長さである円が境界になる。描いた円周上は三角の領域になる。主頂点の右と上の頂点それぞれが円の中心になるので、結局、二つの円が重なる凸レンズ様の区域が3丁目（三角形領域）となり、飛び地になってしまふが、残りが4丁目（四角形領域）ということになる（図6）。これはおりがみの内側での地図なので、ちょっとふざけて「紙内町」と呼ぶことにしている。

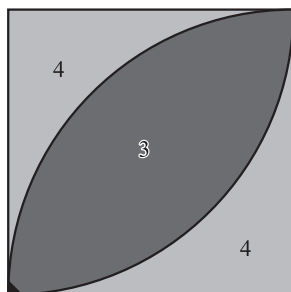


図6 紙内町の地図
3丁目と4丁目

◇広い紙外町の地図も作る

さて、最初にやったように、おりがみの色のついた面を裏に、白い面を表にして、任意に1回折って、色のついた折り返し片が三角形か四角形になる際、左下のかどの主頂点が、おりがみの外にはみ出ている四角形になるケースもあったにちがいない。実は、4丁目はおりがみの外側にも広がっているのだ。だから、その広がりも調べなければならない。

それに加えて、もし、折り返しがおりがみの面積の半分以上に大きくなった場合には、主頂点の

他に二つの頂点が動くことになって、折り返し片は五角形になる。このように、主頂点が移動するおりがみの外側のエリア、つまり「紙外町」も調べることが必要になる。この場合、主頂点の移動範囲は、最大でおりがみの正方形の対角線長を半径とし、主頂点の対角側頂点を中心とする円となるので、前述の小振りのおりがみを使ったとしてもA4用紙には収まりきれない。用紙をB4とかA3などのサイズにすると大きすぎて普通のコンパスでは描けなくなる恐れがあるので、私は、1辺が5cmの市販の小さいおりがみを使い、ほどよい位置を決めて5cm正方形を描いたA4のコピー用紙を用意しておくことにしている（図7）。

紙外町もふくめた地図を示しておこう（図8）。この題材を授業や講座で使う際には、3丁目、4丁目、5丁目が色分けできるように色鉛筆などを用意することになっている。これは、学校でも生涯教育でも、どの学年にもどの世代にも、程度を加減すれば使える課題で、コンパスができれば小学生にも理解できるし、各領域の面積計算をしたり、また、正方形に限らず、長方形用紙やあらかじめカットしておいた正多角形や他の多角形を使うと、高校生や大学生向きにもなる。

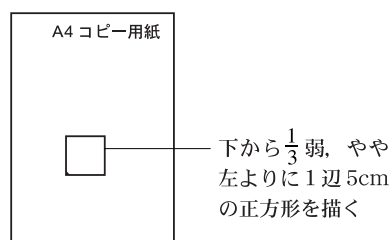


図7 A4コピー用紙に5cm正方形を描く

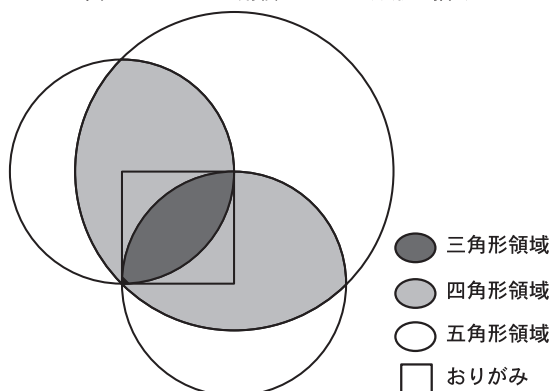
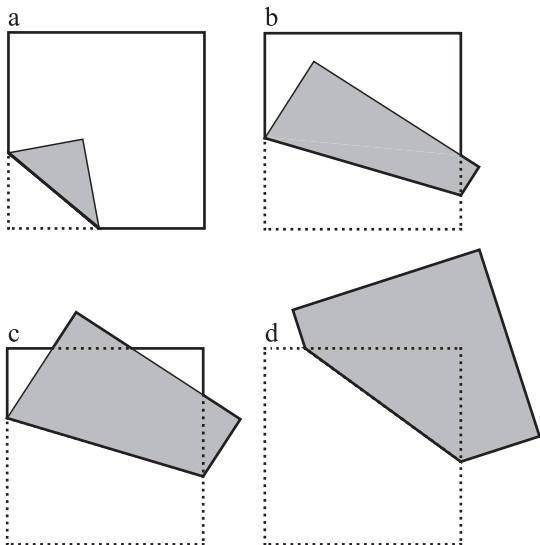


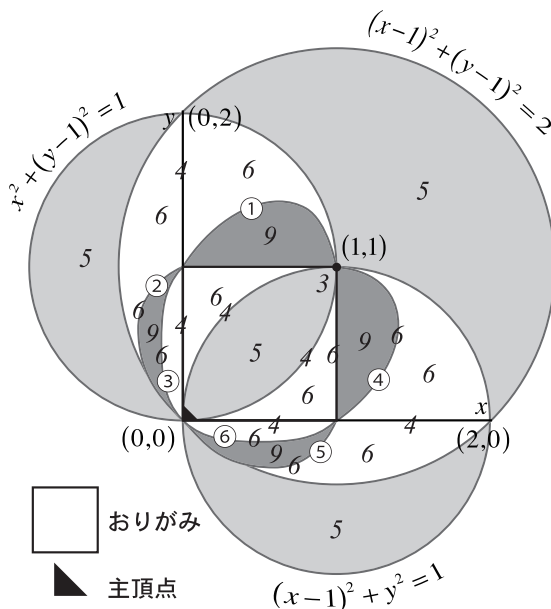
図8 紙外町まで調べる



おりがみを1回折った場合の例

- a 折り返し片は三角形，全体の輪郭は五角形
b 折り返し片は四角形，全体の輪郭は六角形
c 折り返し片は四角形，全体の輪郭は九角形
d 折り返し片も全体の輪郭図形も五角形
（折り返し片はパターン，輪郭図形は太線）

図9 1回折り輪郭図形は何角形？



- ① $y^4 - 2y^3 + (x-1)^2 y^2 + 2xy - x^2 = 0$ ($0 < x < 1$)
② $y^4 - 2y^3 + (x+1)y^2 - x^2 = 0$ ($0 < y < 1$)
③ $y^4 - 2y^3 + (x-1)^2 y^2 - 2x(x-1)y + x^2 = 0$ ($0 < y < 1$)
④ $x^4 - 2x^3 + (y-1)^2 x^2 + 2xy - y^2 = 0$ ($0 < y < 1$)
⑤ $x^4 - 2x^3 + (y+1)x^2 - y^2 = 0$ ($0 < x < 1$)
⑥ $x^4 - 2x^3 + (y+1)^2 x^2 - 2y(y-1)x + y^2 = 0$ ($0 < x < 1$)

図10 1回折りの輪郭図形が3,4,5,6,9角形となる場合の主頂点移動場所の領域と曲線の式

◇輪郭図形も考える

この「1回折って，何角形？」を楽しんでいるうちに，こんな疑問がわいてきた。

「おりがみを1回折って，裏の色が出てきた折り返し片の多角形を考えただけで，色に関係なく全体の輪郭図形が何角形か（図9）を考えるのも面白いのではないか？」

もう，10年以上前のことになるが，この派生課題にも取り組んでみた。多角形の種類は3，4，5，6，9角形と5種類に増えて，私の数学力にとってはかなり難題だったが，その分，長期間楽しむ事ができたので，結果を図示することにしよう（図10）。

◇任意から始まる面白さ

今回の課題はおりがみを任意の大きさで任意の方向に1回折ることから始めた。そして，たった1回折るということが，思いのほか奥行き深く発展した。

最初が今回と同様な任意の1回折りであっても，別の課題に進展する場合もあり，また，最初の一折りの代わりに，おりがみの任意の位置に一つの点を描くことから始まる課題もある。

いずれであっても，冒頭に述べた「ひと味ちがう折り紙の世界」のオリガミクスが数学教育に幾分か役立つものであって欲しいと願っている。

参考文献

- 芳賀和夫 (1999) オリガミクス Part1 : 1-153
日本評論社
芳賀和夫 (2002) 数理を楽しむオリガミクス⑥，折紙探偵団 72 : 14-15 日本折紙学会
Haga, K. (2002) Fold Paper and Enjoy Math: Origamics Origami 3, A.K.Peters : 307-328
芳賀和夫 (2005) オリガミクス Part2 : 1-155
日本評論社