小・中学校で見られるつまずきの特徴
―大きなくくりとして―

元千葉市立葛城中学校校長　五十嵐一博

はじめに

義務教育で算数・数学を学習していく際に，ところどころで大きな壁があり，それを乗り越えるには児童・生徒にとって相当なエネルギーが必要となっている。大人から見ると何ということはないのだが，当事者にとっては難問である。そのことを理解して指導に当たるのとそうでないのとでは，大きな違いが出てくる。場合によっては算数・数学嫌いを作ってしまいかねないからである。

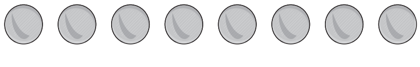
義務教育での大きな壁，つまずきについて少しでも理解していただけたらという思いで，主なものを紹介する。

1　算数における大きな壁

(1) ものの個数

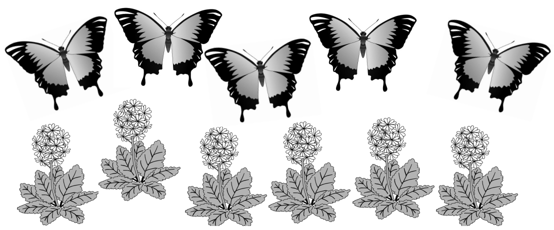
この頃の小学校１年生は，ほとんどが数を数えたり，場合によっては一桁どうしの和を求めたりすることができる。小学校１年生の教室ではこうした様々な学習状況の児童がいる中で，一律にものを数えることから指導していくのである。学習経験が揃っていない中で学級担任は，まず集団で学習を進めていく際のルール作りから始め，算数の内容について一つ一つ丁寧に指導していく。

また，発達段階の差を考慮しながら指導しなければならない。たとえば，下の図のように１列に並んでいる８個のおはじきを数えるとき,「いち」



「に」「さん」「し」…と声を出しながら，指さしをしていく。通常であれば，８個目のおはじきと「はち」という言葉が対応できて，８個あると認識できる。ところが，中には，言葉より指さしの方が速くて，８個目のおはじきのときに「ろく」という児童がいる。この子にとっておはじきは６個である。「もの」の個数と数を表す「言葉」との一対一対応が獲得できていないのである。このような子に足し算を指導することは大変困難である。

そのために小学校１年生の教科書の最初には，たとえば蝶と花の絵があり，どちらが多いか問いかけているページがある。たとえ数を数えることができなくても，一対一対応をさせていくことによって，蝶が多いか，花が多いかがわかる。

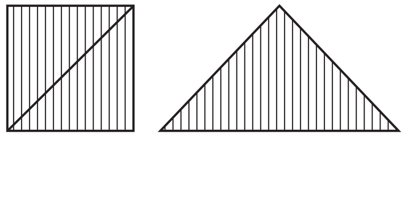


そして,「もの」の個数と，数を表す「言葉」と，記号としての「数字」の三者の一体を目指す。小学校１年生の教科書の初めの方に，絵ばかりのページが続いているのは，文字に頼らずに，そのような概念の獲得が仕組まれているからである。児童が概念を獲得するのには相当程度の時間が必要である。

(2) 変わる面積

小学校４年生で面積についての指導が始まるが，面積については児童の発達段階についても考慮に入れておかなければならない。小学校２・３年生でも次のような現象が見られるからである。

下図の正方形と直角三角形は同じ面積である。正方形を対角線で切り，移動させて大きな直角二等辺三角形を作ったものだからである。見た目には三角形の方が大きく見えるが，目の錯覚である



と大人は判断できる。ところが，小学校２・３年生の児童の中には，目の前で正方形を対角線で切り，移動させて大きな直角二等辺三角形を作ると,「わぁ，大きくなった」と声を上げる。つまり，面積が広くなったと捉えているのである。また，もとの正方形に戻すと「小さくなった」と反応する。これは，ピアジェのいう面積における「量の保存」概念が獲得できていないことになる。このような児童に面積の計算を指導することは困難である。

「量の保存」概念の獲得に関しては，面積以外に，長さ，重さ，体積などでも同様に見受けられるつまずきである。「量の保存」概念の獲得には数多くの量に関する体験を経る必要がある。

2　数学における大きな壁

(1) 方程式

算数では，文章問題を逆算で解いていくことがかなり多く見られる。このような算数の文章問題が好きだった生徒は，中学校で新しく習う方程式を用いて問題を解決するということにかなりの抵抗がある。１つの例を紹介しよう。

> 1000 円を持ってリンゴ５個を買い，80 円の箱に入れてもらったところ，おつりは 120 円でした。リンゴ１個の値段はいくらでしょうか。

このような問題を中学校１年生の方程式の利用の導入で扱っている。このとき，

$$x=\frac{1000-120-80}{5}$$

という方程式を作る生徒がいる。つまり，おつりが 120 円なのだから，代金は 1000 円から引けばよいと考えるような算数的な解き方（逆思考）で解いて，それに $x=$ と付けているのである。考えていることをそのまま（順思考）に方程式を立てる，つまり，

（持っていたお金）－（代金）＝（おつり）

という関係から，方程式

$$1000-(5x+80)=120$$

を作ればよいのだが，そこに抵抗がある。算数が得意だっただけに，算数での解き方にこだわり，方程式の考え方になかなかなじめないのである。方程式を用いて問題を解決していくには，小学校の考え方からの発想の転換が必要であり，数量関係を式に表すことが重要になってくる。一度関係を式に表すことができれば，算数的な解き方をしなくとも，つまり一つ一つ式の意味を考えながら解かなくとも形式的に解くことができる。そのことの良さを知るまでにはかなりの時間を必要とする。

(2) 式？答？

下の問題は，中学校１年生の「文字の式」で文字式に表す学習の中に出てくる問題である。

> 1000 円を持って 200 円の品物を x 個買ったとき，おつりはいくらでしょうか。

このような問題に対して，生徒の一部に y 円と書いてしまう，あるいは a 円と書いてしまうことが見受けられる。問題文に x という文字以外は，y も a も書いていないのにである。こう書く生徒は，間違えているとは思っていない。

その生徒にとって，$1000-200x$ 円というのは式であって答ではないのだ。

本来，ここで得られた $1000-200x$ 円は式でもあり，答でもあるのだが，小学校までは答というと，〇〇円という形で求められてきたので，どうしてもその形にとらわれてしまうのである。

さらに時々見られるのは，この式を“計算”して，$800x$ 円としている生徒がいる。どうしても〇〇円という形にしたいがために，$1000-200$ を計算して 800 としている。中学校１年生にとって，それくらい小学校の影響が及んでいるのである。

(3) 文字式の表し方

文字式の学習の最初に，×，÷ の記号を使わないで表すなどの文字式の表し方についての約束がある。その学習で，$a\div bc$ の式表示と，$a\div b\times c$ の式表示の違いについてなかなかつかめないということがある。bc とは，文字式の表し方「かけ算の記号 × は省いて書く。」という約束に従っ

て $b\times c$ という式の × の記号を省略したものである。だから，生徒にとって $a\div bc$ も，$a\div b\times c$ も同じに見えてしまう。ところが，私たち文字式を操っているものにとっては，$a\div bc$ という式は $\frac{a}{bc}$ であり，$a\div b\times c$ は $\frac{ac}{b}$ である。

文字式の表し方に従って書いた式が混じっている式 $a\div bc$ と，×，÷ の記号をすべての場所で使った式 $a\div b\times c$ との違いは授業の中では扱っておらず，徐々に経験を通して理解していくスタイルをとっている。現在，中学校数学の検定済み教科書は７社あるが，この式表示について注意を喚起している教科書は１社もない。

問題 $a\div bc$ を生徒の目線に立ち，丁寧に書くとすれば，$a\div(bc)$ または，$a\div(b\times c)$ となる。このことを生徒が自力で理解するまでには試行錯誤が必要である。

このようなつまずきの原因は，何の脈絡もなく形式的に「次の式を文字式の表し方に従って書きなさい。」としており，問題を出すための問題になっているからである。たとえば,「 a km の道のりを時速 b km の c 倍の速さで進むときにかかる時間」という意味があれば，理解の程度ももっと高まるであろう。現実にはそのように丁寧に扱っていないのが現状である。受験勉強という形式的なドリルに走っている状況への反省点であろう。問題を考える場面や状況を大切にすべきである。

(4) 奇数＋奇数

文字式の利用でなかなか理解が得られないものとして奇数＋奇数が偶数になるという説明がある。

生徒は n を整数として，奇数を $2n+1$ と表現できるということはわかっている。しかし，奇数＋奇数の式を次のように表して説明していることが多く見られる。

> n を整数とすると，奇数は $2n+1$ と表される。このとき，２つの奇数の和は,
>
> $$(2n+1)+(2n+1)=2(2n+1)$$
>
> $2n+1$ は整数だから，これは偶数である。
> つまり，２つの奇数の和は偶数である。

生徒は奇数といえば，$2n+1$ で表されると理解している。これが原因で２つの奇数をそのまま足してしまったのである。この原因は，文字のもつ役割が理解できていないことにある。

文字には,「文字を表す」ものとして，①未知数，②変数，③一般数，④任意の定数の４つがあり，また,「文字の働き」として㋐プレースホルダ―（いろいろな数が入る器)，㋑数の代表の２つがある。

前述のつまずきの原因は「文字を表す」役割について十分理解できていないためである。つまり $2n+1$ では③一般数を表す n であり，計算式に表された $(2n+1)+(2n+1)$ は④任意の定数でありながら，同一の文字には同一の数を入れる必要があることが理解できていない。

正しく理解させるためには,

$$(2m+1)+(2n+1)$$

と表すことの意味について，具体的に数を代入してどのような数が得られるのかを体験しておく必要がある。あまり意味がないように思えるこの作業が実は非常に大切なのである。

(5) 図形の証明

中学校２年生で，図形の論証が始まる。このときにつまずく生徒が多い。証明はよほどでない限り，仮定からスタートしてすんなりと結論にまでたどり着くことはできない。論理的な組み立てに慣れていない状況での新しい学習であることも原因であるが，結論の一歩手前,「結論がいえるためには，何がいえればよいか。」というような,「逆向きにみる」方法を取り入れて考えることができないのである。

１つの例を示す。中学校２年生の論証の初期には，次のような合同条件を使った証明をしている。

２つの三角形の間で，３つの等しい辺や角を見つけ，それらが三角形の合同条件に当てはまることを示す。そこから，例えば合同な図形の性質である対応する辺は等しいことを述べて結論に至る。

しかし実際に生徒の考えは，このストーリー通りには展開しない。頭の中では，結論である「辺の長さが等しい」ことをいうためには，それを含

む三角形の合同をいえばよいと考える。また，仮定からはいくつかの辺の長さや角の大きさが等しいことがいえる。このように，仮定と結論の両方から考え，整理して証明を記述している。

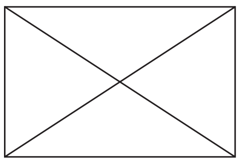
これらで重要なことは，「結論がいえるためには」と考えることである。

この，AからBについて考えているとき，逆向きにBからAを考えることは，様々な場面で有効な思考手段である。これまで以上に，常日頃から植え付けていく必要があると感じている。

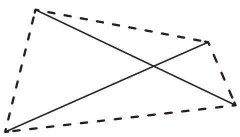
(6) 反例を探す

中学校１年生で，空間における２直線の位置関係や，直線と平面，あるいは２平面の位置関係について学習するが，生徒にとっては，なかなか理解することが難しい。例えば，「空間において，$l \perp m$，$m \perp n$ ならば $l /\!/ n$ である」という命題が正しいかそうでないかの判断に間違いが多く見られる。確かに，$l /\!/ n$ という場合も見られるが，そうでない場合もある。ねじれの位置の場合である。これは１つのパターンだけをみて判断してしまい，他の事例を探しだすことが苦手であるためである。

命題の逆についても同じようなことがいえる。



「長方形の対角線の長さは等しい」という命題は，生徒が証明し，正しいということができている。

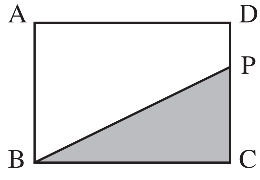


ではその逆，「対角線が等しい四角形は長方形である」という命題は正しいだろうかと考察するときに，例外が１つでも見つかれば，その命題は誤りとなる。しかし生徒はその例外を見つけ出すことに一苦労しているのである。

一般的に，反例を探すことが苦手であるためである。そのために図形が嫌いという生徒もいるくらいである。

(7) 関数の概念

関数という概念は古くからあるものではない。それくらい難しい概念であり，関数は生徒にとってなかなか理解ができない領域の１つである。以下に具体的な問題で見てみる。

> 点Pが，AB = 10cm，BC = 14cm の長方形ABCDの辺DC上を点Dから点Cまで毎秒2cmの速さで動いていきます。
>
> x 秒後の△BCPの面積を y cm^2 とするとき，y を x の式で表し，そのグラフをかきなさい。
>
> 
>

このような問題のとき，点Pが３秒後のように固定されていればまだ計算できるが，点が移動すると途端に式が書けなくなってしまうのである。ましてや，２点が同時に動くときの三角形の面積を求める問題となると，正答率はかなり低くなる。

原因は動いていく点をどのように扱ったらよいか戸惑ってしまうからである。

つまずく要因は他にもある。面積が減っていく，１秒間に1cm以外の速さで動く，この問題では x 秒後となっているが t 秒後となるとさらに正答率が下がる，等々である。

まとめ

この他にも細かなつまずきは数多くある。これまでに述べてきたことと合わせ，大きなくくりとしてまとめるとおよそ次のようにいえるであろう。

① 小学校から中学校前半において，「発達段階」を無視してしまうと，つまずきの原因になる。

② 新しい概念が導入されたり，拡張されたりしたとき，前の概念からなかなか抜け出すことができなかったり，新しい約束事になじめない。

③ 文字を表す役割と、文字の働きについて理解できていないことがつまずきの原因になる。

④ 逆向きにみたり，反例を探すといった行動が不得手である。

⑤ 関数のような動的な見方に対して不得手である。